第11卷 第3期
1991年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.3
Aug. 1991

Bergman空间中的Hardy-Littlewood型定理*

娄增建
（山东曲阜师范大学数学系）

设函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_n$在$|z|<1$内解析，$0<p,q<\infty$，$\alpha>-1$，若

$$\int_0^1(1-r)^{\alpha}M_q(r,f)^p dr<\infty,$$

这里

$$M_q(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q\right)^{1/q}.$$

称满足上述条件的函数的全体为加权Bergman空间$A^{p,q,\alpha}$（见〔1〕），若其中$p=q$，$\alpha=0$，记为A^p。

定义 $f(z)$ 的β（$\beta>0$）阶分数导数为（令$D^0f=f$）$D^{\beta}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\beta}a_nz^n$.

〔2〕和〔3〕均曾在A^p中考虑这样的问题：若$f'\in A^p$，那么$q=?$(与p有关)，才能使$f\in A^q$．本文在较广的$A^{p,q,\alpha}$中完全解决了上述问题．并将f'推广到$D^{\beta}f$．得到

定理1 设$0<p,q<\infty$，$\alpha>-1$，$\beta_1\geqslant 0$，$0<\delta\leqslant\frac{\alpha+1}{p}+\frac{1}{q}$，$0<\beta_2-\beta_1<\delta$，若$D^{\beta_2}f\in A^{p,q,\alpha}$，$D^{\beta_2}f(z)=O(1-|z|)^{-\delta}$，则$D^{\beta_1}f\in A^{s,t,\alpha}$，其中$s=\frac{\delta p}{\delta+\beta_1-\beta_2}$，$t=\frac{\delta q}{\delta+\beta_1-\beta_2}$

若$D^{\beta_2}f\in A^{p,q,\alpha}$，不难证明$D^{\beta_2}f(z)=O(1-|z|)^{-(\alpha+1)/p-1/q}$.

在定理1中令$\delta=\frac{\alpha+1}{p}+\frac{1}{q}$，$\beta_1=0$得

定理2 设$0<p,q<\infty$，$\alpha>-1$，$0<\beta<\delta\triangleq\frac{\alpha+1}{p}+\frac{1}{q}$，若$D^{\beta}f\in A^{p,q,\alpha}$，则$f\in A^{s,t,\alpha}$，其中$s=\frac{\delta p}{\delta-\beta}$，$t=\frac{\delta q}{\delta-\beta}$.

参考文献

〔1〕P.Ahern and M.Jevtic, Michigan Math.J.,30(1983), 53-63.
〔2〕Watanable, H., Proc.Fac.Sci.Tokai Univ.,15(1980), 33-44.
〔3〕Stojan, D., Mat.Vesink, 5(18)(33)(1981), 151-157.

*1989年10月19日收到.