第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

集值半连续映射对的公共不动点定理

宋福民
(南昌航空工业学院数学教研室)

摘要

本文旨在将B.Fisher关于完备度量空间中映射对的公共不动点推广到Hausdotff度量下集值上半连续映射对的情形,得到了定理3,推论5.8.引理7是关于Hausdorff度量的新结果。

B.Fisher[1]证明了完全度量空间中连续映射对的公共不动点,本文将讨论Hausdorff度量下集值上半连续映射对的情形.

设 (X,d) 为完备度量空间, $B(X)$ 表空间 X 所有非空有界子集族, $CB(X)$ 表 X 的一切非空有界闭集的集族.

对于集合间的度量,可以采用 δ-度量(如[2]): $\forall A、B\in B(X)$, 定义

$$\delta(A, B)=\sup\{d(x, y);\ x\in A,\ y\in B\}$$

δ-度量具有单调性,即若 $A_1\subset A_2$, $B_1\subset B_2$, 则

$$\delta(A_1, A_1)\le\delta(A_2, B_2).$$

本文采取应用更为广泛的Hausdorff度量: $\forall A、B\in CB(X)$, 定义

$$H(A, B)=\max\{d^*(A, B),\ d^*(B, A)\}$$

其中 $d^*(A, B)=\sup\limits_{x\in B}d(x, A)=\sup\limits_{x\in B}\inf\limits_{y\in A}d(x, y)$. 显然, Hausdorff度量(简称 H-度量)不再具有单调性.

引理1[3] 设 (X,d) 为一度量空间, $\forall A, B\in CB(X)$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $x\in A$, 必存在 $y\in B$, 使得 $d(x, y)\le H(A, B)+\varepsilon$.

定义2 设集值映射 $F: B(X)\to B(X)$, 称 F 在 $x_0\in A$ $(A\in B(X))$ 上半连续, 如 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta=\eta(x_0, \varepsilon)>0$, 当 $d(x, x_0)\le\eta$ 时, 有 $d^*(F(x_0), F(x))<\varepsilon$.

如 F 在 A 上每点都上半连续, 则称 F 在 A 上上半连续 (u.s.c.,).

定理3 设 F、T: $B(X)\to B(X)$ 为两闭值集值映射, 且都在 X 上上半连续, 且满足, $\forall A、B\in B(X)$ 有

$$H(F^pA, T^qB)\le C\max\{H(F^rA,\ T^sB),\ 0\le r\le p,\ 0\le s\le q\}\tag{1}$$

其中 $0\le C<1$, p、q 为确定的正整数, 则

* 1989年10月23日收到。

1° F、T存在唯一公共不动点，且$FZ=TZ=\{Z\}$.

2° Z分别是F、T的唯一不动点.

证明 （Ⅰ）$\forall x\in X$，作迭代：令

$$F^0x=T^0x=x,\ X_n=F^nx,\ Y_n=T^nx\ (n=1,2,\cdots)$$

记$G=\max\{H(Y_s,\ Y_q)\}$ $(0\leq s\leq q)$. 下证数列$\{H(X_n,Y_q)\}_{n=1}^{\infty}$有界.

若不然，对任意正整数k，$\exists n_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 使$H(X_{n_k},Y_q)>k$，并且，这样选取n_k，使得n_k是$\{H(X_n,Y_q)\}_{n=1}^{\infty}$中使$H(X_{n_k},\ Y_q)>k$成立最小的指标，按如此办法选出的$n_k$，有$D_k\triangleq H(X_{n_k},\ Y_q)\geq\max\{H(X_r,\ Y_q);\ 0\leq r\leq n_k\}$. 当$k$充分大时

$$D_k>CG/(1-C).$$

另一方面，

$H(X_r,\ Y_s)\leq H(X_r,\ Y_q)+H(Y_q,\ Y_s)\leq D_k+G(0\leq r\leq n_k,\ \ 0\leq s\leq q)$ 由（1）式，

$$\begin{aligned}D_k&=H(X_{n_k},\ Y_q)=H(F^pX_{n_k-p},\ T^qx)\\&\leq C\max\{H(F^rX_{n_k-p},\ T^sx);\ 0\leq r\leq p,\ 0\leq s\leq q\}\\&=C\max\{H(F^{r+n_k-p}x,\ T^sx);\ 0\leq r\leq p,\ 0\leq s\leq q\}\\&=C\max\{H(F^{r'}x,\ T^sx);\ n_k-p\leq r'\leq n,\ 0\leq s\leq q\}\\&\leq C\max\{H(X_r,\ Y_s);\ 0\leq r\leq n_k,\ 0\leq s\leq q\}\\&\leq C(D_k+G)\end{aligned}$$

因此得$D_k\leq\dfrac{CG}{1-C}$，矛盾，同理$\{H(X_p,\ Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$有界，从而$\forall s,r\in\mathbf{N}$,

$$H(X_r,\ Y_s)\leq H(X_r,\ Y_q)+H(X_p,\ Y_q)+H(X_p,\ Y_s)$$

所以

$$\{H(X_r,\ Y_s)\}_{r,s=1}^{\infty}\text{有界} \tag{2}$$

令$M=\sup\{H(X_r,Y_s),\ r,s=0,1,2,\cdots\}$，则$\forall\varepsilon>0$，取足够大的$N$，使$C^NM<\varepsilon$. 记$Q=\max\{p,\ q\}$. 当$m,n\geq NQ$，反复利用（1）式，有

$$\begin{aligned}H(X_n,Y_n)&\leq C\max\{H(X_r,\ Y_s);\ m-p\leq r\leq m,\ n-q\leq s\leq n\}\\&\leq C^2\max\{H(X_r,\ Y_s);\ m-2p\leq r\leq m,\ n-2q\leq s\leq n\}\\&\cdots\cdots\\&\leq C^N\max\{H(X_r,Y_s);\ m-Np\leq r\leq m,\ n-Nq\leq s\leq n\}\\&\leq C^NM<\varepsilon,\end{aligned}$$

即当m、$n\geq NQ$，有

$$H(X_m,\ Y_n)<\varepsilon \tag{3}$$

于是当m、n、$k\geq NQ$时有

$$H(X_m,\ X_k)\leq H(X_m,\ Y_n)+H(Y_n,\ X_k)<2\varepsilon \tag{4}$$

同理可证

$$H(Y_m,\ Y_k)<2\varepsilon \tag{5}$$

由（2）式易见$\{X_n\}$有界，F闭值，于是$X_n\in CB(X)$. 由引理1，对$x_N\in X_N$，$\forall\varepsilon_m=\dfrac{1}{m}>0$ $(m>N)$，$\exists x_m\in X_m$，使得

$$d(x_N, x_m) \leq H(X_N, X_m) + \frac{1}{m}$$

故得一序列 $\{x_m\}$ $(m > N)$，由三角不等式和引理 1 易证 $\forall x_l$、$x_k \in \{x_m\}$

$$d(x_l, x_k) < 2\varepsilon + \frac{1}{l} + \frac{1}{k} \tag{6}$$

于是 $\{x_m\}$ 是 X 中基本列，因 X 完备，故存在 z 使 $x_n \to z\ (n \to \infty)$．此外

$$H(z, Fx_n) \leq d(z, x_{n+1}) + H(x_{n+1}, X_{n+1}) + H(X_{n+1}, Fx_n)$$

因为 $x_{n+1} \in X_{n+1}$，$Fx_n \subset X_{n+1}$，Fx_n，$X_{n+1} \in CB(X)$，故右边后两项为 0，即有

$$H(z, Fx_n) \leq d(z, x_{n+1}) < \varepsilon \quad (n \geq NQ) \tag{7}$$

再来证明

$$\lim_{n \to \infty} H(z, Fx_n) = H(z, Fz). \tag{8}$$

为此须证

$$\lim_{n \to \infty} d^*(Fx_n, z) = d^*(Fz, z) \tag{9}$$

以及

$$\lim_{n \to \infty} d^*(z, Fx_n) = d^*(z, Fz). \tag{10}$$

为证（9）式，只须证 $\lim\limits_{n \to \infty} d(z, Fx_n) = d(z, Fz)$ 即

$$\lim \inf_{g_n \in Fx_n} d(z, g_n) = \inf_{w \in Fz} d(z, w) \quad (\text{记为} M)$$

又记 $M_n = \inf\limits_{g_n \in Fx_n} d(z, g_n)$ 由 $M = \inf\limits_{w \in Fz} d(z, w)$，$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists w_n \in Fz$，使得 $\lim\limits_{n \to \infty} d(z, w_n) = M$．由 $M_n = \inf\limits_{g_n \in Fx_n} d(z, g_n)$，所以 $\forall k \in \mathbf{N}$，$\exists \{n_k\} \subset \{n\}$，使得 $g_{n_k} \in Fx_{n_k}$ 有 $\lim\limits_{k \to \infty} d(z, g_{n_k}) = M_n$，因 F 在 z u.s.c.，$n \geq NQ$，$d(x_n, z) \leq \eta$，于是 $\sup d(z_n, Fz) < \varepsilon$，故当 k 充分大时

$$d(g_{n_k}, Fz) < \varepsilon \qquad (g_{n_k} \in Fx_{n_k})$$

即 $\inf d(g_{n_k}, w) < \varepsilon$ $(w \in Fz)$，从而知 $\exists w_{n_k} \in Fz$，使

$$\lim_{k \to \infty} d(g_{n_k}, w_{n_k}) = 0.$$

又由 $Fz \in CB(X)$，故有 $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\} \subset Fz$，使

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} d(w_{n_k}, w_n) = 0.$$

这样由

$$d(z, w_n) \leq d(z, g_{n_k}) + d(g_{n_k}, w_{n_k}) + d(w_{n_k}, w_n)$$

先令 $k \to \infty$，再令 $n \to \infty$，可得

$$M \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} M_n$$

由 $d(z, g_{n_k}) \leq d(z, w_n) + d(w_n, w_{n_k}) + d(w_{n_k}, g_{n_k})$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n \le M$$

于是$M=\lim\limits_{n\to\infty} M_n$，即（9）式得证．

类似地可证（10）式，总之，当F上半连续时，$x_n\to z$，有$\lim\limits_{n\to\infty} H(z,\ Fx_n)=H(z,$ $Fz)$，即（8）式得证．再由（7）式，得$H(z,\ Fz)=0$．因此$Fz=\{z\}$．

取$y_n\in Y_n$，$n\in \mathbf{N}$，对任意m，$n\ge NQ$，由（3）式及$\{Y_n\}$是有界闭集族，据引理1，类似于（6）式的证明易知，$\forall \varepsilon'>0$ $d(x_m,\ y_n)<\varepsilon'$．先令$m\to\infty$，再令$n\to\infty$得$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ $=z$．　类似于（7）式的证明有

$$H(z,\ Ty_n)\le d(z,\ y_{n+1})<\varepsilon \quad (n\ge NQ)$$

因F在z .s.c.，类似可以证明$H(z,\ Tz)=0$即得$Tz=\{z\}$．所以z是F、T的公共不动点．

（Ⅱ）证唯一性

设z^*是F的另一不动点，即$z^*\in Fz^*$．可令$z_n=z^*$，则$z_n\in F^*z^*$，且$z_n\to z^*$．记$X_n=F^nz^*$．由（4）式，当m、n充分大时，$H(X_m,\ X_n)<\varepsilon$，

$$\begin{aligned} H(z^*,\ Fz^*)&=H(z_n,\ Fz_m)=d^*(z_n,\ Fz_n)\\ &\le d(z_n,\ X_n)+H(X_n,\ X_{n+1})+d^*(X_{n+1},\ Fz_n), \end{aligned}$$

于是$z_n\in X_m$，$Fz_n\subset X_{n+1}$，Fz_n，X_{n+1}均为有界闭集．故上式右端第一、三项为0，故

$$H(z^*,\ Fz^*)\le H(X_n,\ X_{n+1})<\varepsilon,$$

由ε的任意性$Fz^*=\{z^*\}$．再由（1）式

$$\begin{aligned} d(z^*,\ z)&=H(F^pz^*,\ T^qz)\\ &\le C\max\{H(F^rz^*,\ T^sz);\ 0\le r\le p,\ 0\le s\le q\}\\ &=Cd(z^*,\ z) \end{aligned}$$

因此，$d(z^*,\ z)=0$，$z^*=z$，即z是F的唯一不动点，同理可证z是T的唯一不动点．

注4　文［1］中定理一是上述定理中F、T为单映值映射的特殊情况．

推论5　设F、T：$B(X)\to B(X)$为两闭值集值映射，F在X上上半连续，且存在$0\le C<1$及正整数p，使得$\forall A$、$B\in B(X)$，有

$$H(F^pA,\ TB)\le C\max(H(F^rA,\ T^sB);\ 0\le r\le p,\ 0\le s\le 1\}, \tag{11}$$

则F、T有唯一公共不动点z，且$Fz=Tz=\{z\}$．

证明　$\forall x\in X$，令$X_n=F^nx$，$Y_n=T^nx$，取$x_n\in X_n$，$y_n\in Y_n$，由定理3的证明知$\lim\limits_n y_n=\lim x_n=z$．由$F$u.s.c.得$z$是$F$的不动点且$Fz=\{z\}$．又

$$\begin{aligned} H(z,\ Tz)&=H(F^pz,\ Tz)\le C\max\{H(F^rz,\ T^sz);\ 0\le r\le p,\ 0\le s\le 1\}\\ &=CH(z,\ Tz) \end{aligned}$$

因此$H(z,\ Tz)=0$，得$Tz=\{z\}$．故z是F、T的公共不动点．

注意到定理3中，证明唯一性时并未用到F的上半连续性，故z是F、T的唯一不动点．

定义6[2]　设$\{A_n\}$是$B(X)$的集合序列，称$\{A_n\}$收敛于$A\subset X$，如果

（i）对每个$a\in A$，$\exists a_n\in A_n$，$n=1,2,3\cdots$，序列a_n收敛于a；

（ii）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $A_n\subset\bigcup_{x\in A}B(x,\ \varepsilon)$，$B(x,\ \varepsilon)=\{y\in x,\ d(x,\ y)<\varepsilon\}$．其中 $B(x,\ \varepsilon)=\{y\in x,\ d(x,\ y)<\varepsilon\}$．

此时称 A 是 $\{A_n\}$ 的极限．

引理 7 设 $\{B_n\}$ 是 X 中有界子集序列，且收敛于有界集 B，A 是任一有界集，则

$$\lim_{n\to\infty}H(A,\ B_n)=H(A,\ B). \tag{12}$$

证明 为证（12）式，须分别证

$$\lim_{n\to\infty}d^*(A,\ B_n)=d^*(A,\ B), \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}d^*(B_n,\ A)=d^*(B,\ A). \tag{14}$$

先证（13）式，由 $d^*(A,\ B)=\sup_{x\in B}d(x,\ A)$，所以对每个 $n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n\in B$，使得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,\ A)=d^*(A,\ B)\qquad(x_n\in B)$$

对每个 $x_n\in B$，$n\geq1$，由定义6（i），$\exists x_n^{(k)}\in B_k(k\geq1)$ 使得 $x_n^{(k)}\to x_n$ $(k\to\infty)$，因此

$$d(x_n,\ A)=\lim_{k\to\infty}d(x_n^{(k)},\ A)\leq\lim_{n\to\infty}d^*(A,\ B_n),$$

故有

$$d^*(A,\ B)\leq\lim_{n\to\infty}d^*(A,\ B_n) \tag{15}$$

另一方面，由定义6（ii），$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n\geq N$ 时 $B_n\subset\bigcup_{x\in B}B(x,\ \varepsilon)$，则

$$d^*(A,\ B_n)=\sup d(x_n,\ A)\leq\sup_{x\in B}d(x,\ A)+2\varepsilon$$

$$=d^*(A,\ B)+2\varepsilon.$$

因此 $\overline{\lim_{n\to\infty}}d^*(A,\ B_n)\leq d^*(A,\ B)2\varepsilon$，即得

$$d^*(A,\ B)\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}d^*(A,\ B_n) \tag{16}$$

由（15）、（16）式 $d^*(A,\ B)=\lim_{n\to\infty}d^*(A,\ B_n)$．（13）式得证．

再由（13）式有 $\lim_{n\to\infty}d(y,\ B_n)=d(y,\ B)$，对两边取上确界

$$\sup_{y\in A}\lim_{n\to\infty}d(y,\ B_n)=\sup_{y\in A}d(y,\ B).$$

易证

$$\sup_{y\in A}\lim_{n\to\infty}d(y,\ B_n)=\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in A}d(y,\ B_n).$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in A}d(y,\ B_n)=\sup_{y\in A}d(y,\ B).$$

即 $\lim_{n\to\infty}d^*(B_n,\ A)=d^*(B,\ A)$，（14）式得证

当 p、$q=1$，定理 3 中的 F，T 上半连续都可取消，可以证明

推论 8 设 F、T：$B(X)\to B(X)$ 为两闭值集值映射，且 $\exists\ 0\leq C<1$，使得 $\forall A$、$B\in$

$B(X)$ 满足

$$H(FA,\ TB) \le C\max\{H(A,\ B),\ H(A,\ TB),\ H(FA,\ B)\}$$

则 F、T 有唯一公共不动点.

证明 $\forall x \in X$，令 $X_n = F^n x$，$Y_n = T^n x$，取 $x_n \in X_m$，$y_n \in Y_n$，由定理 3 的证明知 $x_n \to z$ $y_n \to z$. 由

$$H(Fz,\ z) = d^*(z, Fz) \le H(Fz, Ty_n) + d^*(Y_{n+1},\ Ty_n) + d(Y_{n+1},\ y_{n+1}) + d(y_{n+1},\ x_m) + d(x_m,\ z)$$

所以 $y_{n+1} \in Y_{n+1}$，$Ty_n \subset Y_{n+1}$，Ty_n，Y_{n+1} 均为有界闭集，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 n，$m \ge N$ 时，由上式得

$$\begin{aligned} H(Fz,\ z) &< H(Fz,\ Ty_n) + \varepsilon \\ &\le C\max\{d(z,\ y_n),\ H(z, Ty_n),\ H(Fz,\ y_n)\} + \varepsilon \end{aligned} \qquad (17)$$

由引理 7 $\lim\limits_{n \to \infty} H(Fz,\ y_n) = H(Fz,\ z)$,

$$H(z,\ Ty_n) \le d(z,\ y_{n+1}) + H(y_{n+1},\ Y_{n+1}) + H(Y_{n+1},\ Ty_n)$$

令 $n \to \infty$，由（17）式得

$$H(Fz,\ z) < CH(Fz, z) + \varepsilon\ ,$$

$$(1 - C)H(Fz,\ z) < \varepsilon\ .$$

由 ε 的任意性，所以 $H(Fz,\ z) = 0$，故 $Fz = \{z\}$.

同理可证 z 是 T 的不动点，且 $TZ = \{z\}$，故 z 是 F、T 的公共不动点，唯一性由定理 3 中 Ⅱ 的证明即得.

参 考 文 献

[1] B. Fisher, Glasgow Math, J.21 (1980), 165-167.

[2] B. Fisher and K. Iseki, Math, Japonica 28, No. 5(1983), 639-646.

[3] S.B. Nadler Jr., Pacific J. Math. 30 (1969), 475-488.

Common Fixed Point Theorems for Mulitvalued Semi-Continuous Mappings

Song Fumin

(Nanchang Institute of Aeronautical Technology)

Abstract

In this paper, B.Fisher's results on common fixed point theorems in complete metric space have been expanded to the multivalued semi-continuous mappings by means of Hausdorff metric, which is expressed in Theorem 3 and Corollargs 5、8. In addition, lemma 7 is a new result on Hausdorff metric.