第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

Fredholm映射的集值紧摄动的拓扑度*

范 先 令
（兰州大学数学系）

本文中我们将对零指标Fredholm映射的集值紧摄动建立拓扑度理论，以适应解决某些非光滑问题的需要．

§1 预 备 知 识

零指标Fredholm映射的单值连续紧摄动的拓扑度理论是本文的基础，这方面的知识见〔1〕．

对于度量空间 (X,d) 中的二非空子集 A 与 B，记 $d^*(A,B)=\sup\{d(x,B)|x\in A\}$．

设 $F: X\to 2^E$ 是集值映射．对 $A\subset X$，记 $F(A)=\bigcup\limits_{x\in A}F(x)$．$F$ 的值域 $F(X)$ 记为 $R(F)$，F 的图象 $\{(x,y)\in X\times E|x\in X,\ y\in F(x)\}$ 记为 $\Gamma(F)$．

本节中，X 为度量空间，E 为Banach空间．这时 $X\times E$ 也为度量空间．对于 E 中的二非空子集 A 与 B，$A\pm B=\{x\pm y|x\in A,y\in B\}$。文中所有集值映射均是具非空值的．

下面两个已知的结果在本文中要用到．

引理1.1[2] 设 $G: X\to 2^E$ 是具凸值的上半连续集值映射，则 $\forall\varepsilon>0$，存在单值连续映射 g: $X\to E$，使得 $R(g)\subset \mathrm{co}\,R(G)$，且 $d^*(\Gamma(g),\Gamma(G))<\varepsilon$．

引理1.2[2] 具闭值的上半连续集值映射的图象是闭的．

定义1.1 集值映射 $F: X\to 2^E$ 称为固有的，若对于 E 中的任意紧集 K，$\{x\in X\ |F(x)\cap K\neq\phi\}$ 是 X 中的紧集．

引理1.3 若 $F: X\to 2^E$ 是具闭值的上半连续的固有映射，则 F 是闭映射，即 F 映 X 中的闭集为 E 中的闭集．

证明 设 A 是 X 的闭子集．设 $y_n\in F(A)$，且 $y_n\to y_0$．这时有 $x_n\in A$，使 $y_n\in F(x_n)$．注意到集合 $K=\{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ 是紧集，由 F 的固有性，知 $\{x_n\}$ 有收敛子列，不妨设 $x_n\to x_0$，那么 $x_0\in A$．由引理1.2，得 $(x_0,y_0)\in\Gamma(F)$，即 $y_0\in F(x_0)\subset F(A)$．从而 $F(A)$ 是闭集．

定义1.2 集值映射 $G: X\to 2^E$ 称为紧的，若 $\overline{G(X)}$ 是 E 中的紧集．

引理1.4 设 $F,G: X\to 2^E$ 是两个具紧值的上半连续集值映射．若 F 是固有的，而 G 是紧的，则 $F-G: X\to 2^E$ 是具紧值的上半连续固有映射．

证明 $F-G$ 具紧值与上半连续性是易见的．下证 $F-G$ 的固有性．设 K 为 E 中的紧集．设有序列 $x_n\in X$，使得 $(F-G)(x_n)\cap K\neq\phi$，即有 $y_n\in F(x_n)$ 与 $z_n\in G(x_n)$ 使得 $y_n-z_n\in$

* 1989年12月1日收到．

K. 这推出$y_n \in K+\overline{G(X)}$. 由于$K+\overline{G(X)}$是紧集，从$F$的固有性，推知$\{x_n\}$有收敛子列. 不妨设$x_n \to x_0, y_n \to y_0, z_n \to z_0$. 那么$y_0-z_0 \in K$. 由于$F-G$的图象闭，可得$y_0-z_0 \in (F-G)(x_0)$ 于是集合$\{x \in X \mid (F-G)(x) \cap K \neq \phi\}$是紧集. 这就证明了$F-G$的固有性.

§2 零指标Fredholm映射的集值紧摄动的拓扑度

现设X是仿紧的定向C'-Banach-Fredholm流形，Ω是X的开子集，E是Banach空间，$f: \overline{\Omega} \to E$是固有的连续映射，$f: \Omega \to E$是允许的零指标$C'$-Fredholm（非线性）映射. 设$G: \overline{\Omega} \to 2^E$是具紧凸值的上半连续集值紧映射. 设$p \in E \setminus (f-G)(\partial\Omega)$. 下面来定义拓扑度$\deg(f-G,\Omega,p)$. 设在$X$上赋予了度量.

定义2.1 据引理1.1，取一列单值连续映射$g_n: \overline{\Omega} \to E$，使得$R(g_n) \subset \mathrm{co}R(G)$，且$d^*(\Gamma(g_n), \Gamma(G)) \to 0$. 现定义$\deg(f-G,\Omega,p)=\lim\limits_{n\to\infty}\deg(f-g_n,\Omega,p)$，其中$\deg(f-g_n,\Omega,p)$是$f$的单值连续紧摄动的拓扑度[1].

下面来证明定义2.1的合理性.

首先，由$R(g_n) \subset \mathrm{co}R(G)$知$g_n$为紧映射.

引理2.1 当n充分大时，有$p \notin (f-g_n)(\partial\Omega)$，从而度数$\deg(f-g_n,\Omega,p)$有意义.

证明 假若不然，则有点列$x_k \in \partial\Omega$与正整数列$n_k \to \infty$，使得$f(x_k)-g_{n_k}(x_k)=p$. 由$d^*(\Gamma(g_{n_k}), \Gamma(G)) \to 0$，可找$x_k' \in \overline{\Omega}$与$y_k' \in G(x_k')$，使得$d(x_k, x_k') \to 0$，$\|g_{n_k}(x_k)-y_k'\| \to 0$. 由$\overline{G(\overline{\Omega})}$紧，不妨设$y_k' \to y_0$. 这时$g_{n_k}(x_k) \to y_0$，$f(x_k) \to p+y_0$. 由$f$的固有性，知$\{x_k\}$有收敛子列. 不妨设$x_k \to x_0$. 那么，$x_0 \in \partial\Omega$，且$x_k' \to x_0$. 由$\Gamma(G)$的闭性，知$y_0 \in G(x_0)$. 由$f$的连续性，得$f(x_0)-y_0=p$. 此即$p \in (f-G)(x_0)$. 这与已知条件$p \notin (f-G)(\partial\Omega)$矛盾.

引理2.2 当n充分大时，$\deg(f-g_n,\Omega,p)$是与n无关的常值整数.

证明 对自然数n, m，作映射$H_{n,m}: \overline{\Omega} \times [0,1] \to E$为$H_{n,m}(x,t)=(1-t)g_n(x)+tg_m(x)$.

下证当n与m充分大时，有

$$p \notin f(x)-H_{n,m}(x,t) \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0,1].$$

假若该结论不真，则存在序列$x_k \in \partial\Omega$，$t_k \in [0,1]$及正整数列$n_k \to \infty$，$m_k \to \infty$，使得

$$f(x_k)-[(1-t_k)g_{n_k}(x_k)+t_k g_{m_k}(x_k)]=p.$$

不妨设$t_k \to t_0$，$g_{n_k}(x_k) \to y_1$，$g_{m_k}(x_k) \to y_2$. 由f的固有性可推出$\{x_k\}$有收敛子列. 不妨设$x_k \to x_0$. 那么$x_0 \in \partial\Omega$，且有$f(x_0)-[(1-t_0)y_1+t_0y_2]=p$. 由于$d^*(\Gamma(g_n), \Gamma(G)) \to 0$，可找$x_k'$，$x_k'' \in \overline{\Omega}$，$y_k' \in G(x_k')$，$y_k'' \in G(x_k'')$，使得$d(x_k, x_k') \to 0$，$\|g_{n_k}(x_k)-y_k'\| \to 0$，$d(x_k, x_k'') \to 0$，$\|g_{m_k}(x_k)-y_k''\| \to 0$. 这时有$x_k' \to x_0$，$x_k'' \to x_0$，$y_k' \to y_1$，$y_k'' \to y_2$. 由$\Gamma(G)$的闭性推得$y_1 \in G(x_0)$；$y_2 \in G(x_0)$. 由$G(x_0)$的凸性，知$(1-t_0)y_1+t_0y_2 \in G(x_0)$. 这便有$p \in (f-G)(x_0)$，此与题设矛盾.

由Fredholm映射单值紧摄动的拓扑度的同伦不变性（见[1]），可知当n、m充分大时，有

$$\deg(f-g_n,\Omega,p)=\deg(f-g_m,\Omega,p).$$

引理2.3 定义2.1中所定义的拓扑度与满足所述条件的单值逼近序列g_n的选取无关.

证明 类似于引理2.2的证明.（略）

注记2.1 文献[3]或[4]中对Banach空间中集值紧向量场所建立的度理论是我们的度理论的当$X=E$且$f=I$为恒同映射时的特例.

定理2.1 定义2.1中所定义的拓扑度有下述性质

1）$\deg(f-G,\Omega,p)=\deg(f-G-p,\Omega,0)$.

2）若$\deg(f-G,\Omega,p)\neq 0$,则存在$x\in\Omega$，使得$p\in f(x)-G(x)$.

3）设Ω_1和Ω_2是Ω的不交开子集．若

$$p\notin f(x)-G(x)\qquad \forall x\in\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2),$$

则$\deg(f-G,\Omega,p)=\deg(f-G,\Omega_1,p)+\deg(f-G,\Omega_2,p)$.

4）设$H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to 2^E$是具紧凸值的上半连续紧映射．若

$$p\notin f(x)-H(x,t)\qquad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall t\in[0,1],$$

则$\deg(f-H_t,\Omega,p)$ 与$t\in[0,1]$ 无关．

5）若p_1与p_2属于$E\setminus(f-G)(\partial\Omega)$ 的同一连通分支，则$\deg(f-G,\Omega,p_1)=\deg(f-G,\Omega,p_2)$.

6）设G_n: $\overline{\Omega}\to 2^E$是一列具紧凸值的上半连续集值紧映射．若$d^*(\Gamma(G_n),\Gamma(G))\to 0$,则当$n$充分大时，$\deg(f-G_n,\Omega,p)=\deg(f-G,\Omega,p)$.

7）存在正数ε，使得对任意的具紧凸值的上半连续集值紧映射$F:\overline{\Omega}\to 2^E$，只要

$$d^*(F(x),G(x))<\varepsilon\qquad \forall x\in\partial\Omega,$$

就有$\deg(f-F,\Omega,p)=\deg(f-G,\Omega,p)$.

证明 结论(1)易于从定义推出，结论(2)—(6)与文献〔3〕或〔4〕中相应结论的证法类似．这里从略．关于结论5,请注意，由引理1.3与1.4，知$(f-G)(\partial\Omega)$是闭集．这样$E\setminus(f-G)(\partial\Omega)$的连通分支是开集．下证结论7)．由引理1.3与1.4，$(f-G)(\partial\Omega)$是闭集．故由$p\notin(f-G)(\partial\Omega)$可知存在$\varepsilon>0$,使得$d(p,(f-G)(\partial\Omega))>\varepsilon$。令$H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to 2^E$为

$$H(x,t)=(1-t)F(x)+tG(x).$$

在题设条件下易于核验

$$p\notin f(x)-H(x,t)\qquad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall t\in[0,1].$$

由同伦不变性4)，即得证结论7)．

注记2.2 当X不可定向时，按照定义2.1,可得到模2度$\deg_2(f-G,\Omega,p)$.

参 考 文 献

〔1〕Борцсович, Ю.Г., Звягин, В.Г., Успехи Мат.Наук, 32:4(1977)3—54.

〔2〕Aubin, J.P., Cellina, A., Differential inclusions, Springer-Verlag, 1984.

〔3〕Lloyd, N.G., Degree theory, Camb.Univ.Press, 1978.

〔4〕Cellina, A, Lasota, A., Lincel Rend Sc.Fis.Mat.Nat., 47(1969) 434—440.

A Topological Degree for Set-Valued Compact Perturbations of Fredholm Maps

Fan Xianling

(Department of Mathematics, Lanzhou University)

Abstract

Suppose that X is a paracompact oriented C'-Banach-Fredholm manifold, Ω is an open subset of X, E is a Banach space, $f:\overline{\Omega}\to E$ is a proper continuous map, $f:\Omega\to E$ is an admissible (nonlinear) C'-Fredholm map of index zero, $G:\overline{\Omega}\to 2^E$ is an upper semicontinuous compact set-valued map with compact convex values, $p\in E\setminus(f-G)(\partial\Omega)$. In this paper the degree $\deg(f-G,\Omega,p)$ is defined.