第11卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 11 No. 3
1991年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1991

不可定向流形上Laplace算子的特征值*

徐森林　　周坚

（中国科学技术大学数学系，合肥）

摘　要

本文的目的是应用定向复盖流形$\widetilde{M}$，正交分解$\wedge^k\widetilde{M}=\wedge^k\widetilde{M}^+\oplus\wedge^k\widetilde{M}^-$ 以及同构$\pi^*:\wedge^kM\to\wedge^k\widetilde{M}^+$，将$n$维定向紧致$C^\infty$ Riemann流形 (M,g) 上的Laplace算子$\Delta:\wedge^kM\to\wedge^kM$的特征值的一些结果和Liouville定理推广到$n$维不可定向紧致$C^\infty$ Riemann流形上.

设 $(M,g)=(M,\langle,\rangle)$ 为n维定向C^∞ Riemann流形，$\wedge^kM$为M上C^∞ k形式的全体，$\wedge M=\bigoplus_{k=0}^{n}\wedge^kM$. 由$g=\langle,\rangle$自然诱导了$\wedge^k_pM$上一个内积，仍记为$\langle,\rangle$. 设$\{e_i\}$为$T_pM$的规范正交基，$\{e^i\}$为其对偶基，即为$T_p^*M$的规范正交基. 对任何$p\in M$，令线性算子

$$*:\wedge^k_pM\to\wedge^{n-k}_pM,\quad \omega\mapsto *\omega,$$

使得$e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\longmapsto e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{n-k}}$，其中$\{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots j_{n-k}\}$为$\{1,\cdots,n\}$的一个偶置换，即

$$(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k})\wedge(e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{n-k}})=e^1\wedge\cdots\wedge e^n.$$

此外，$*1=e^1\wedge\cdots\wedge e^n$，$*(e^1\wedge\cdots\wedge e^n)=1$. 从$\wedge_pM$上的$*$算子，自然地有一整体$*$算子

$$*:\wedge M\longrightarrow\wedge M,\qquad *:\wedge^kM\longrightarrow\wedge^{n-k}M,$$

称此算子为(M,g)的Hodge$*$算子；称$\delta=(-1)^{n(k+1)+1}*d*$为余微分算子；称$\Delta=d\delta+\delta d:\wedge^kM\to\wedge^kM$为Laplace-Beltrami算子，有时记$\Delta$为$\Delta_k$. 从$\delta=(-1)^{n(k+1)+1}*d*$两次用$*$算子可看出，$\delta$与规范正交基$\{e_i\}$的定向选取无关. 因此，$\delta$和$\Delta$对不可定向流形也可定义. 如果$f\in\wedge^0M=C^\infty(M,\mathbf{R})$，自然定义$\delta f=0$. 在［4］中，通过简单计算得到

$$\Delta f=(d\delta+\delta d)f=\delta df=\delta\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\Big)$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{n}\Big(g^{ji}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial g^{ji}}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{1}{2}g^{ji}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\ln\det(g_{ks})}{\partial x^j}\Big),$$

其中$\{x^i\}$为局部坐标系，$(g^{ij})=(\langle dx^i,dx^j\rangle)$为$(g_{ij})=(\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle)$的逆矩阵.

当$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为定向紧致$C^\infty$ Riemann流形时，令

$$(\omega_1,\omega_2)=\int_M\omega_1\wedge*\omega_2=\int_M\langle\omega_1,\omega_2\rangle*1=\int_M\langle\omega_1,\omega_2\rangle v_g,$$

---

* 1989年12月6日收到. 国家自然科学基金和TWAS基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

其中$\omega_1,\omega_2 \in \wedge^k M, v_g = *1$为（$M, g$）的体积元素．易见（,）为$\wedge^k M$上的一个内积，从而扩张为$\wedge M$上的一个内积，且有

引理1　（1）$(d\omega,\eta)=(\omega,\delta\eta), \omega \in \Delta^{k-1}M, \eta \in \Delta^k M$，即$d$和$\delta$是彼此共轭的；

（2）$(\Delta\omega,\eta)=(\omega,\Delta\eta)$，$\omega,\eta \in \wedge^k M$，即$\Delta$为自共轭线性算子；

（3）$(\Delta\omega,\omega)\geqslant 0$ 且$\Delta\omega=0 \Longleftrightarrow (\Delta\omega,\omega)=0 \Longleftrightarrow d\omega=0$ 和$\delta\omega=0$.

证明可参阅〔4〕p221.

设T^*M为M的余切丛，$\wedge^n T^*M$为n阶外形式丛（秩1的向量丛）．如果在$\wedge^n T^*M$－{0截面}中引进等价关系：$\alpha\sim\beta \Longleftrightarrow \beta=\lambda\alpha$，$\lambda>0$，且在等价类集合$\widetilde{M}$中引进商拓扑，则$\widetilde{M}$和典型投影$\pi:\widetilde{M}\to M$为$M$的2层复盖，称为$M$的定向复盖．也可在几何上描述如下：给

$$\widetilde{M}=\{O_x|O_x\text{为}T_xM\text{的一个定向，}x\in M\}$$

一个C^∞微分构造，使得

$$\pi:\widetilde{M}\to M,\quad \pi(O_x)=x$$

为局部C^∞微分同胚，于是$\widetilde{M}$和π为M的（2层）定向复盖（参阅〔1〕，pp35—36）．不难证明M可定向，且当M紧致时，M也紧致．于是，对于n维不可定向的紧致C^∞ Riemann流形（M,g），$(\widetilde{M},\widetilde{g})=(\widetilde{M},\pi^*g)$为$n$维$C^\infty$定向紧致Riemann流形，且$\pi$为局部同尺映射．在$\wedge^k\widetilde{M}$和$\wedge\widetilde{M}$上可定义内积

$$(\widetilde{\omega},\widetilde{\eta})=\int_{\widetilde{M}}\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{*}\widetilde{\eta}=\int_M\langle\widetilde{\omega},\widetilde{\eta}\rangle\ \widetilde{*}\ |=\int_{\widetilde{M}}\langle\widetilde{\omega},\widetilde{\eta}\rangle v_g.$$

并利用$\wedge^k\widetilde{M}^+$和$\wedge\widetilde{M}^+$上的内积定义$\wedge^kM$和$\wedge M$上内积为

$$(\omega,\eta)=(\pi^*\omega,\pi^*\eta)=\int_{\widetilde{M}}\pi^*\omega\wedge\widetilde{*}(\pi^*\eta)=\int_{\widetilde{M}}\langle\pi^*\omega,\pi^*\eta\rangle v_{\widetilde{g}}.$$

记$\widetilde{d}$，$\widetilde{*}$，$\widetilde{\delta}$，$\widetilde{\Delta}=\widetilde{d}\widetilde{\delta}+\widetilde{\delta}\widetilde{d}$分别为（$\widetilde{M},\widetilde{g}$）上的外微分．Hodge $*$算子，余微分算子和Laplace算子．从

$$\begin{aligned}(d\omega,\eta)&=(\pi^*d\omega,\pi^*\eta)=(\widetilde{d}\pi^*\omega,\pi^*\eta)\\&=(\pi^*\omega,\widetilde{\delta}\pi^*\eta)=(\pi^*\omega,\pi^*\delta\eta)=(\omega,\delta\eta)\end{aligned}$$

和引理1中（2）（3）的证明，立即得到不可定向的（M,g）上的d,δ,Δ仍具有引理1的性质．

用O_x^-表示O_x的相反定向，并令

$$\tau:\widetilde{M}\longrightarrow\widetilde{M},\qquad \tau(O_x)=O_x^-,$$

则τ无不动点且$\tau\circ\tau=Id_{\widetilde{M}}$．记

$$\wedge^k\widetilde{M}^\pm=\{\omega\in\wedge^k\widetilde{M}|\tau^*\widetilde{\omega}=\pm\widetilde{\omega}\},$$
$$\wedge\widetilde{M}^\pm=\bigoplus_{k=0}^{n}\wedge^k\widetilde{M}^\pm.$$

于是有

引理2　（1）$\wedge^k\widetilde{M}^+\perp\wedge^k\widetilde{M}^-$，$\wedge^k\widetilde{M}=\wedge^k\widetilde{M}^+\oplus\wedge^k\widetilde{M}^-$为正交直和分解；

（2）$\wedge\widetilde{M}^\pm$为$\widetilde{d}$，$\widetilde{\delta}$，Δ的不变子空间；

（3）$\pi^*:\wedge^kM\to\wedge^kM^+$为同构．

证明　（1）由于$\tau:\widetilde{M}\to\widetilde{M}$反转定向，因此$\tau^*\widetilde{*}=-\widetilde{*}\tau^*$，$\tau^*\widetilde{\delta}=\widetilde{\delta}\tau^*$，$\tau^*\widetilde{\Delta}=\widetilde{\Delta}\tau^*$．对$\forall\,\widetilde{\omega}\in\wedge^k\widetilde{M}^+$，$\forall\,\widetilde{\eta}\in\wedge^k\widetilde{M}^-$有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$(\widetilde{\omega},\widetilde{\eta})=\int_{\widetilde{M}}\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{*}\widetilde{\eta}=\int_{\tau\widetilde{M}}\tau^*(\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{*}\widetilde{\eta})=\int_{-\widetilde{M}}\tau^*\widetilde{\omega}\wedge\tau^*(\widetilde{*}\widetilde{\eta})$$
$$=\int_{-\widetilde{M}}\widetilde{\omega}\wedge(-\widetilde{*}\tau^*\widetilde{\eta})=-\int_{\widetilde{M}}\widetilde{\omega}\wedge(\widetilde{*}\widetilde{\eta})=-(\widetilde{\omega},\widetilde{\eta}),$$

故 $(\widetilde{\omega},\widetilde{\eta})=0$，即$\widetilde{\omega}\perp\widetilde{\eta}$．所以$\wedge^k\widetilde{M}^+\perp\wedge^k\widetilde{M}^-$．

对任意$\widetilde{\omega}\in\wedge^k\widetilde{M}$，显然$\widetilde{\omega}=\frac{1}{2}(\widetilde{\omega}+\tau^*\widetilde{\omega})+\frac{1}{2}(\widetilde{\omega}-\tau^*\widetilde{\omega})$．从$\tau\circ\tau=Id_{\widetilde{M}}$和$\tau^*\circ\tau^*=Id_{\wedge^k\widetilde{M}}$得到

$$\frac{1}{2}(\widetilde{\omega}\pm\tau^*\widetilde{\omega})\in\wedge^k\widetilde{M}^\pm,\quad\wedge^k\widetilde{M}=\wedge^k\widetilde{M}^++\wedge^k\widetilde{M}^-.$$

再由$\wedge^k\widetilde{M}^+\perp\wedge^k\widetilde{M}^-$推出$\wedge^k\widetilde{M}=\wedge^k\widetilde{M}^+\oplus\wedge^k\widetilde{M}^-$为正交直和分解．

（2）因为$\widetilde{d}\circ\tau^*=\tau^*\circ\widetilde{d}$，故对$\forall\ \widetilde{\omega}\in\wedge\widetilde{M}^\pm$有

$$\tau^*(\widetilde{d}\widetilde{\omega})=\widetilde{d}(\tau^*\widetilde{\omega})=\widetilde{d}(\pm\widetilde{\omega})=\pm\widetilde{d}\widetilde{\omega}$$
$$\tau^*(\widetilde{\delta}\widetilde{\omega})=\widetilde{\delta}(\tau^*\widetilde{\omega})=\widetilde{\delta}(\pm\widetilde{\omega})=\pm\widetilde{\delta}\widetilde{\omega},$$
$$\tau^*(\widetilde{\Delta}\widetilde{\omega})=\widetilde{\Delta}(\tau^*\widetilde{\omega})=\widetilde{\Delta}(\pm\widetilde{\omega})=\pm\widetilde{\Delta}\widetilde{\omega}.$$

这就证明了$\wedge^k\widetilde{M}^\pm$为$\widetilde{d}$，$\widetilde{\delta}$和$\widetilde{\Delta}$的不变子空间．

（3）对$\forall\ \omega\in\wedge^kM$，从$\pi\circ\tau=\pi$ 得到$\tau^*(\pi^*\omega)=(\pi\circ\tau)^*\omega=\pi^*\omega$，故$\pi^*\omega\in\wedge^k\widetilde{M}^+$．

若$\pi^*\omega=0$，由π 为局部 C^∞ 微分同胚知$\omega=0$，故π^*为单射．

反之，对$\forall\ \widetilde{\omega}\in\wedge^k\widetilde{M}^+$，由$\pi$ 局部C^∞微分同胚和$\tau^*\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}$可推出存在$\omega\in\wedge^kM$，使得$\pi^*\omega=\widetilde{\omega}$，因此$\pi^*$为满射．这就证明了$\pi^*:\wedge^kM\longrightarrow\wedge^k\widetilde{M}^+$为同构． □

如果$\Delta\omega=\lambda\omega$，$\omega\neq0$，则称$\lambda$为$\Delta$的特征值；称$\omega$为对应于$\lambda$的特征形式（若$k=0$，称为特征函数）；称

$$E_\lambda^k(M)=\{\omega\in\wedge^kM\,|\,\Delta\omega=\lambda\omega\}$$

为对应于特征值λ 的特征空间．如果$\lambda=0$，$\Delta\omega=0$，则称ω为调和形式（若 $k=0$，称为调和函数）．因为Δ为$\wedge^kM$上的自共轭线性算子，故λ 为实数．

定理1 （Liouville 定理）设(M,g)为n维连通紧致 C^∞ Riemann 流形（定向或不定向），f为调和函数，即$\Delta f=0$，$f\in\wedge^0M=C^\infty(M,R)$，则$f$为$M$上的常数函数．

证明 从引理1及其后面的说明．无论M可定向还是不可定向，都有

$$(\Delta f,f)=((d\delta+\delta d)f,f)=(df,df)+(\delta f,\delta f),$$

故$\Delta f=0\Longleftrightarrow df=0$ 和$\delta f=0$．所以在任何连通局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$中，由

$$0=df=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

知$\frac{\partial f}{\partial x^i}=0$，$i=1,\cdots,n$和$f|_u=$常值．再从$M$连通推出$f$为$M$上的常数函数． □

引理3 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维不可定向的紧致$C^\infty$ Riemann流形，$(\widetilde{M},\widetilde{g})$为$M$的定向复盖 C^∞ Riemann 流形．记$E_\lambda^k(M)^\pm=E_\lambda^k(M)\cap\wedge^kM^\pm$，则

$$E_\lambda^k(\widetilde{M})=E_\lambda^k(\widetilde{M})^+\oplus E_\lambda^k(\widetilde{M})^-$$

为正交直和分解，且$\lambda\in R$(实数域）为Δ的特征值$\Longleftrightarrow\lambda\in\mathbf{R}$为$\widetilde{\Delta}$ 的特征值和$E_\lambda^k(\widetilde{M})^+\neq\{0\}$．

证明 因为$\wedge^k\widetilde{M}^\pm$ 为$\widetilde{\Delta}$ 的不变子空间，所以对$\forall\ \omega=\omega^++\omega^-\in E_\lambda^k(\widetilde{M})$，$\omega^\pm\in\wedge^kM^\pm$，有

$$\widetilde{\Delta}\omega^++\widetilde{\Delta}\omega^-=\widetilde{\Delta}\omega=\lambda\omega=\lambda\omega^++\lambda\omega^-,$$
$$\widetilde{\Delta}\omega^\pm=\lambda\omega^\pm,$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\omega^{\pm}\in E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})\cap\wedge^{k}\widetilde{M}^{\pm}=E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})^{\pm}.$$

从而得到

$$E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})=E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})^{+}\oplus E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})^{-}$$

为正交直和分解.

再证第二部分

($\Longrightarrow$) 设$\Delta\omega=\lambda\omega$, $\omega\neq0$, 则

$$\widetilde{\Delta}\pi^{*}\omega=\pi^{*}\Delta\omega=\pi^{*}(\lambda\omega)=\lambda\pi^{*}\omega.$$

又因π^{*}: $\wedge^{k}M\to\wedge^{k}M^{+}$为同构，故$\pi^{*}\omega\neq0$ 和λ 也为$\widetilde{\Delta}$的特征值，且$E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})^{+}\neq\{0\}$.

($\Longleftarrow$) 设$\widetilde{\omega}\in E_{\lambda}^{k}(\widetilde{M})^{+}$, $\widetilde{\Delta}\widetilde{\omega}=\lambda\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}\neq0$, 则由π 为局部C^{∞}微分同胚，存在$\omega\neq0$, 使$\widetilde{\omega}=\pi^{*}\omega$, 且

$$\pi^{*}\Delta\omega=\widetilde{\Delta}\pi^{*}\omega=\widetilde{\Delta}\widetilde{\omega}=\lambda\widetilde{\omega}=\pi^{*}(\lambda\omega),$$

再由π^{*}: $\wedge^{k}M\longrightarrow\wedge^{k}\widetilde{M}^{+}$为同构推出$\Delta\omega=\lambda\omega$, $\omega\neq0$, 即λ 为Δ 的特征值.

引理 4 设$\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}^{+}+\widetilde{\omega}^{-}\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\ \{E_{\lambda_i}^{k}(\widetilde{M})\}$, 则$\omega^{\pm}\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\ \{E_{\lambda_i}^{k}(\widetilde{M})^{\pm}\}$.

证明 设$\{u_j^i\,|\,j=1,\cdots,m_i\}$为$E_{\lambda_i}^{k}(\widetilde{M})$的一个基（下面定理2(2)指出$E_{\lambda_i}^{k}(\widetilde{M})$为有限维的）. 记

$$\widetilde{\omega}^{+}+\widetilde{\omega}^{-}=\widetilde{\omega}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}\mu_j^iu_j^i=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}\mu_j^iu_j^{i}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}\mu_j^iu_j^{i-},$$

则由引理3得到

$$\widetilde{\omega}^{\pm}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}\mu_j^iu_j^{i\pm}\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\ \{E_{\lambda_i}^{k}(\widetilde{M})^{\pm}\}.$$ □

引理 5 $\wedge^{k}M$在内积 (,) 诱导的拓扑下，如果$\widetilde{\omega}_n\to\widetilde{\omega}$, 则$\omega_n^{\pm}\to\omega^{\pm}$.

证明 从

$$\|\widetilde{\omega}_{n}^{\pm}-\widetilde{\omega}^{\pm}\|\leqslant\|\widetilde{\omega}_{n}^{+}-\widetilde{\omega}^{+}\|+\|\widetilde{\omega}_{n}^{-}-\widetilde{\omega}^{-}\|=\|\widetilde{\omega}_n-\widetilde{\omega}\|$$

立即推出：如果$\widetilde{\omega}_n\to\widetilde{\omega}$, 则$\widetilde{\omega}_n^{\pm}\to\widetilde{\omega}^{\pm}$. □

定理 2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维紧致$C^{\infty}$ Riemann 流形，则

(1) Δ: $\wedge^{k}M\to\wedge^{k}M$的特征值$\{\lambda_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$满足:

$$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_i<\cdots$$

且

$$\lim_{i\to+\infty}\lambda_i=+\infty;$$

(2) 对每个特征值λ_i, 它的特征空间$E_{\lambda_i}^{k}(M)=\{\omega\in\wedge^{k}M\,|\,\Delta\omega=\lambda_i\omega\}$是有限维的，且当$\lambda_i\neq\lambda_j$时，$E_{\lambda_i}^{k}(M)\perp E_{\lambda_j}^{k}(M)$;

(3) $\wedge^{k}M$在内积 (,) 导出的拓扑下有

$$\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\ \{E_{\lambda_i}^{k}(M)\}}=\wedge^{k}M.$$

证明 如果M可定向，定理的证明可参阅〔2〕p172 和〔3〕pp254—255.

如果M不可定向，则M的定向复盖流形$\widetilde{M}$为n维定向紧致C^{∞} Riemann流形.

(1) 因$\widetilde{\Delta}$: $\wedge^{k}\widetilde{M}\to\wedge^{k}\widetilde{M}$的特征值$\{\lambda_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$满足:

$$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_i<\cdots$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

且$\lim\limits_{i\to+\infty}\lambda_i=+\infty$。

对于M，为证明其结论（1），从引理3，只须证明存在无限个λ_i，使$E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\neq\{0\}$。

因为$\wedge^k\widetilde{M}^+\cong\wedge^k M$和$\wedge^k M$无限维，故$\wedge^k\widetilde{M}^+$也是无限维的。

（反证）假设只有有限个$E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\neq\{0\}$，则存在自然数$N>1$，当$i\geqslant N$时，$E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+=\{0\}$。于是

$$\underset{1\leqslant i\leqslant N-1}{\mathrm{Span}}\underbrace{\{E^k_{\lambda_i}(M)^+\}}_{(\text{有限维})}\subseteq\underbrace{\wedge^k M^+}_{(\text{无限维})}.$$

由此存在$\widetilde{\omega}\in\wedge^k\widetilde{M}^+-\overline{\underset{1\leqslant i\leqslant N-1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(M)^+\}}$。

根据关于定向流形M的本定理的结论（3），存在$\widetilde{\omega}_n\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})\}$，使得

$$\widetilde{\omega}_n\to\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}^++\widetilde{\omega}^-=\widetilde{\omega}^+，\text{其中}\widetilde{\omega}^-=0.$$

因此，从引理4和引理5可得

$$\omega_n^+\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\}，\quad\widetilde{\omega}_n^+\to\widetilde{\omega}^+=\widetilde{\omega},$$

以及

$$\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}^+\in\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(M)^+\}}.$$

这与

$$\widetilde{\omega}\in\wedge^k\widetilde{M}^+-\overline{\underset{1\leqslant i\leqslant N-1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\}}=\wedge^k\widetilde{M}^+-\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\}}$$

相矛盾.

（2）由π^*同构，$\pi^*(E^k_{\lambda_i}(M))=E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\subset E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})$和$E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})$有限维推出$E^k_{\lambda_i}(M)$是有限维的.

如果$\lambda_i\neq\lambda_j$，$\Delta\omega=\lambda_i\omega$，$\Delta\eta=\lambda_j\eta$，则

$$\lambda_i(\omega,\eta)=(\lambda_i\omega,\eta)=(\Delta\omega,\eta)=(\omega,\Delta\eta)=(\omega,\lambda_j\eta)=\lambda_j(\omega,\eta),$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)(\omega,\eta)=0,$$

故$(\omega,\eta)=0$。

（3）设$\omega\in\wedge^k\widetilde{M}^+$，由关于定向流形$\widetilde{M}$的本定理的结论（3），存在$\omega_n\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(M)\}$使得

$$\widetilde{\omega}_n^++\widetilde{\omega}_n^-=\widetilde{\omega}_n\to\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}^++\widetilde{\omega}^-=\widetilde{\omega}^+,$$

故从引理4和引理5有

$$\widetilde{\omega}_n^+\to\widetilde{\omega}^+=\widetilde{\omega}，\quad\widetilde{\omega}_n^+\in\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\}$$

以及

$$\omega=\omega^+\in\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(M)^+\}}.$$

这就证明了

$$\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(\widetilde{M})^+\}}=\wedge^k\widetilde{M}^+.$$

再根据$(\pi^*\omega,\pi^*\eta)=(\omega,\eta)$和$\pi^*:E^k_{\lambda_i}(M)\to E^k_{\lambda_i}(M)^+$为内积空间的同构得到

$$\overline{\underset{i\geqslant1}{\mathrm{Span}}\{E^k_{\lambda_i}(M)\}}=\wedge^k M.$$

□

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

〔1〕Bröcker, Th. and Janich, k., Introduction to Differential Topology, Cambridge University Press, 1982, pp35—36.

〔2〕Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York London Paris Toryo, 1987, p172.

〔3〕Warner, F.W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, Soett, Foreman and Co. Glenview Illinois, 1971, pp 223—225.

〔4〕徐森林和薛春华，流形，高等教育出版社，1991，第 345 页.

The Characteristic Values of Laplacian Δ on the Nonorientable Compact C^∞ Riemannian Manifolds

Xu Senlin Zhou Jian

(Dept. Math., University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

The aim of this paper is to generalize some results of the characteristic values of Lapiacian Δ: $\wedge^k M \to \wedge^k M$ and Liouville Theorem on an n-dimensional orientable compact C^∞ Riemannian manifold (M, g) to a nonorientable manifold applying the orientation cover manifold $\widetilde{M}$, the orthogonal decomposition $\wedge^k \widetilde{M} = \wedge^k \widetilde{M}^+ \oplus \wedge^k \widetilde{M}^-$ and the isomorphism π^*: $\wedge^k M \to \wedge^k \widetilde{M}^+$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.