第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

双曲空间中旋转对称的极小超曲面

王新民 许志才
（陕西师大数学系，西安） （淮南矿业学院基础部）

摘 要

本文给出了双曲空间H^n中旋转对称的极小超曲面的微分方程，对这类超曲面进行了分类，它们是H^n中的超平面或广义悬链面，而每个广义悬链面被夹在两个平行的超平面之间，且以这两个超平面为渐近平面．

§1 前 言

早在1776年，Meusnier证明了：R^3中旋转对称的极小曲面必是悬链面．最近，姜磊[3]研究了R^n中的旋转对称极小超曲面M，他指出：当$n\geq 4$时，M是超平面或广义悬链面，且每个广义悬链面都夹在两个平行的超平面之间，并以这两个平面为渐近平面．注意，以上两作者都是把极小超曲面作为变分问题的解来处理的．

另一方面，从等变化微分几何的观点，R^3中SO(2)旋转群的一个自然推广是余维为2的主轨道型的正交变换群（G，R^n）．一般地，R^n中的极小超曲面局部地由一个二阶椭园型拟线性偏微分方程所确定，这是一个相当困难的分析问题，但若M是旋转对称的极小超曲面，就可把偏微分方程化为常微分方程．目前，这种方法正是几何学家和分析学家所关注的．本文试图利用这种方法研究双曲空间H^n中旋转对称的极小超曲面．具体地说得到：

定理1 H^n中旋转对称的极小超曲面必是超平面或广义悬链面 而每个广义悬链面被夹在两个平行的超平面之间，且以这两个超平面为渐近平面．

定理2 H^n中两个广义悬链面在H^n的刚体运动下合同，当且仅当，它们的渐近平面间的距离相等．

§2 H^n中旋转对称极小超曲面的微分方程

设$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是实（$n+1$）数组，赋予所有这样数组构成的集合一个Lorentz度量

$$(x, y)=-x_0y_0+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1}$$

称这个空间为（1，n）型Lorentz空间．记为$R^{1,n}$．令

* 1989年10月24日收到．

$$H^n(-1)=\{x\in R^{1,n} \mid (x,x)=-1,\ x_0>0\} \qquad (2)$$

在诱导度量下，$H^n(-1)$ 是常曲率为 -1 的完备Riemmann流形，称其为 n 维双曲空间，以下简记为H^n. 设$O(n-1)$ 是H^n上等距群中具有一维固定点$F(O(n-1),H^n)=H^1$（H^n中一维完备测地线）的一个子群，而$O(n-2)$ 是一个任意选择但固定了$O(n-1)$ 在H^n上作用的主迷向子群. 这样$H^2=F(O(n-2),H^n)$ 是一个完备的二维全测地子流形，具有一个诱导作用$z_2=N(O(n-2))/O(n-1)$ 其中z_2是H^2上相对于$H^1=F(O(n-1),H^n)$ 的反射，因此，一个闭半空间H^2_+自然地是一个z_2在H^2上作用的基本区域. 进一步有

$$H^2_+\cong H^2/z_2\cong H^n/O(n-1) \qquad (3)$$

现在，在H^2_+中取下列坐标系：选一个基点$0\in H^1$，设 x 是沿$H^1=\partial H^2_+$正向H^1上的弧长，对每点$p\in H^2_+$，设$\overline{pq}$是一个测地弧，其长度等于$d(p,H^1)$（如此的$\overline{pq}$唯一地由 p 确定）. 现规定 p 点的坐标是（x，y），这里 x是q在H^1中的坐标，而 $y=\overline{pq}=d(p,H^1)$.（见图1）. 由上可知：

$$-\infty<x<+\infty \qquad 0\leq y<+\infty \qquad (4)$$

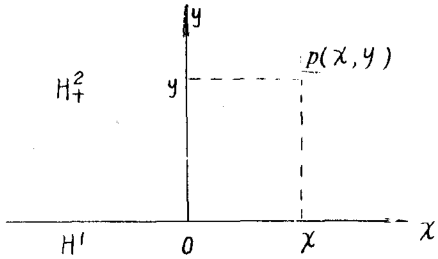

图 1

因为基本区域H^2_+是全测地的且正交于所有$O(n-1)$ 轨道，因此$H^n/O(n-1)$ 上的轨道距离度量恒同于H^2_+上的常曲率度量，于是，在上面的坐标系下，可以由下式给出

$$ds^2=\cosh^2y\cdot dx^2+dy^2 \qquad (5)$$

通过$p(x,y)$ 的$O(n-1)$ 轨道的（$n-2$）维体积是

$$v(x,y)=c_{n-2}\cdot\sinh^{n-2}y \qquad (6)$$

这里c_{n-2}是（$n-2$）维单位球的体积. 为了得到H^n中旋转对称极小超曲面的微分方程，需要下面的引理（[2]），它把G不变子流形$M\subset H^n$的中曲率的计算归结为它的象$M/G\subset H^n/G$的中曲率的计算.

引理1 设M是（G，H^n）的一个不变子流形，具有与H^n相同的主轨道型，p 是主轨道$\overline{p}\in M/G$上的一点，v_p是M在 p 点的任意一个单位法向量，而$v_{\overline{p}}$是v_p在$\overline{p}$处的象向量，那么

$$H(v_p)=\overline{H}(v_{\overline{p}})-\frac{d}{dv_{\overline{p}}}\ln v \qquad (7)$$

这里$H(v_p)$ 和$\overline{H}(v_{\overline{p}})$ 分别是M和M/G的中曲率，$d/dv_{\overline{p}}$是沿$v_{\overline{p}}$方向的方向导数，v 是主轨道的体积.

现在，设M是H^n中一个旋转对称的极小超曲面，$\gamma=M\cap H^2_+$是M的生成曲线，从（5）和（6）得

$$e_x=\frac{1}{\cosh y}\cdot\frac{\partial}{\partial x},\quad e_y=\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos\alpha,\quad \cosh y\cdot\frac{dx}{ds}=\sin\alpha$$

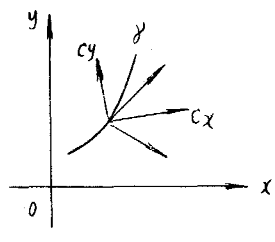

图 2

$$\mathscr{K}=\frac{da}{ds}+\sinh y\cdot\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d}{dv_{\bar{p}}}=-\sin a\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\cos a\cdot\frac{1}{\cosh y}\cdot\frac{\partial}{\partial x} \qquad (8)$$

这里e_x，e_y分别是H_+^2在x，y方向上的单位切向量，$\tau_{\bar{p}}$和$v_{\bar{p}}$分别是γ在$\overline{p}$点的单位切向量和单位法向量，a是$\tau_{\bar{p}}$和e_y间的夹角，$\mathscr{K}$是γ在$\overline{p}$点的测地曲率（见图 2）．结合（7）和（8）可得γ的下列微分方程：

$$\frac{da}{ds}+\sinh y\frac{dx}{ds}+\sin a\cdot(n-2)\cdot\coth y=0 \qquad (9)$$

§3 定理的证明

定理 I 的证明 从（8）得

$$1=\cos^2 a+\sin^2 a=\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\cosh^2 y\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\cosh^2 y\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

$$=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\cosh^2 y\right],$$

所以

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad (10)$$

如果以x作自变量，y作为x的函数，则从（9）及（10）得

$$\frac{d}{dx}\left(c_{n-2}\sinh^{n-2}y\cdot\cosh^2 y\right)\Big/\left(\sqrt{\cosh^2 y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d}{ds}\left(c_{n-2}\sinh^{n-2}y\cdot\cosh y\sin a\right)$$

$$=c_{n-2}\sinh^{n-2}y\cdot\cosh y\cdot\frac{dy}{dx}\left\{\frac{da}{ds}+\sinh y\cdot\frac{dx}{ds}+(n-2)\sin a\cdot\coth y\right\}$$

$$=0 \qquad (11)$$

即

$$\frac{c_{n-2}\cdot\sinh^{n-2}y\cdot\cosh^2 y}{\sqrt{\cosh^2 y+(dy/dx)^2}}=K\ (\text{常数}) \qquad (12)$$

从（12）解出dy/dx得

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c_{n-2}^2}{K^2}\cdot\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^4 y-\cosh^2 y}=\sqrt{h^2\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^4 y-\cosh^2 y} \qquad (13)$$

其中$h=c_{n-2}/K$是常数．因此

$$x=\int\frac{dy}{\cosh y\cdot\sqrt{h^2\sinh^{2n-4}\cdot y\cdot\cosh^2 y-1}} \qquad (14)$$

从（13）知

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sinh 2y}{2\sqrt{h^2\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^4 y-\cosh^2 y}}\left[(n-2)h^2\sinh^{2n-6}y\cdot\cosh^4 y+\right.$$

$$+2h^2\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^2y-1\,] \tag{15}$$

因此$y=y(x)$在$y=0$处是拐点，且$y>0$时，$y(x)$是下凸函数，$y<0$时，$y(x)$是上凸函数，由于

$$\begin{aligned} x&=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\cosh y\cdot\sqrt{h^2\cdot\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^2y-1}}=a(h)<+\infty \\ x&=\int_0^{-\infty}\frac{dy}{\cosh y\cdot\sqrt{h^2\cdot\sinh^{2n-4}y\cdot\cosh^2y-1}}=-a(h)>-\infty \end{aligned} \tag{16}$$

故$x\to\pm a$时，$y\to\pm\infty$，因此M以超平面$x=\pm a$为渐近平面，且M夹在这两个平面之间.

定理2的证明 由（16），不难看出，$a(h)$是h的单调减函数，故h被a唯一确定，而$2a$正是渐近平面之间的距离.

参 考 文 献

[1] W. Y. Hsiang, Duke Math. J., Vol.49, No.3, 485—496.

[2] W. Y. Hsiang and W. T. Hsiang, On the construction of exotic and/or Knotted spheres of constant mean curvature in the standard sphere, to appear.

[3] 姜磊，数学的实践与认识，1989. 1. 92—94.

Minimal Hypersurface of Revolution in Hyperbolic Space H^n

Wang Xinmin Xu Zhicai

Abstract

Let M be a rotational minimal hypersurface in the hyperbolic space H^n. In this paper, we give differential equation of the generating curve y in the fundamental domain H_+^2, and obtain the following clossification theorem.

Theorem The rotational minimal hypersurfaces in the hyperbolic space H^n muse be hyperplane or generalized catenoids. Moreover, each generalized catenoid is bounded between two parallel hyperplanes and is asymptotic them.