第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

共形平坦空间的极小子流形*

陈 建 华
(锦州师范学院)

摘 要

S.S.Chern, M.Do Carmo和S.Kobayashi在[1]文中讨论了$S^{n+p}(1)$中的紧致极小子流形。本文将[1]中的结论推广到了共形平坦空间.

§1 Simons型不等式

1. 说明:

本文的记号、符号、局部基底等除特殊说明的以外，均与[1]中的相同.

设N是$n+p$维Riemannian流形，M是N的n维子流形，分别用K、R记N、M的Riemannian曲率.

记$\tilde{\nabla}$与∇分别为N、M的关于Levi-civita联络的共变导数．定义N的曲率算子为:

$$K(x,y)=-\tilde{\nabla}_{\tilde{x}}\tilde{\nabla}_{\tilde{y}}+\tilde{\nabla}_{\tilde{y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{x}}+\tilde{\nabla}_{[\tilde{x},\ \tilde{y}]}$$

若$\forall x,\ y\in TM$，有$K(x,\ y)(TM)\subset TM$，则说TM在N的曲率算子下不变，而称M为N的co—子流形.

命题 M是N的co—子流形$\Leftrightarrow M$的Coduzzi方程为

$$h^a_{ijk}-h^a_{ikj}=0\qquad \forall a、i、j、k \tag{1.1}$$

证明 记N的联络矩阵为$(\tilde{w}_{AB})$，那么

$$\tilde{\nabla}_{e_j}e_i=\sum w_{iA}(e_j)e_A$$

$$\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{\nabla}_{e_j}e_i=\frac{1}{2}\sum K_{mijk}e_m+\frac{1}{2}\sum K_{aijk}e_a$$

$$K(e_j,\ e_k)e_i=\sum K_{mijk}e_m+\sum K_{aijk}e_a$$

故$K(e_j,\ e_k)e_i\in TM\Leftrightarrow K_{aijk}=0,\forall a,i,j,k$.证毕.

由此知，当N是常曲率空间时，它的子流形都是co—子流形.

定义 $q(=n+p)$维Riemannian流形的共形曲率张量为:

$$C_{ABCD}=K_{ABCD}-\frac{1}{q-2}(K_{AC}\delta_{BD}-K_{AD}\delta_{BC}+\delta_{AC}K_{BD}-\delta_{AD}K_{BC})$$

$$+\frac{K}{(q-1)(q-2)}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})$$

* 1989年10月16日收到.

当$C_{ABCD}=0$时，流形就称为是共形平坦的。以下我们总设N是$q(=n+p)$维共形平坦空间．

2．N中紧致极小的co—子流形的Simons不等式

由［1］的计算知：

$$\Delta h^a_{ij}=\sum h^a_{kkij}-\sum K_{akikj}-\sum K_{aijkk}+\sum h^a_{mk}R_{mijk}+\sum h^a_{mi}R_{mkjk}-\sum h^\beta_{ki}R_{a\beta jk},$$

又

$$\sum K_{aijkm}w_m=dK_{aijk}-\sum K_{amjk}w_{mi}-\sum K_{aimk}w_{mj}-\sum K_{aijm}m_{mk}-\sum K_{\beta ijk}w_{\beta a}=0.$$

所以

$$\Delta h^a_{ij}=\sum h^a_{mk}R_{mijk}+\sum h^a_{mi}R_{mkjk}-\sum h^\beta_{ki}R_{a\beta jk},$$

$$\sum h^a_{ij}\Delta h^a_{ij}=\sum h^a_{ij}h^a_{mk}K_{mijk}+\sum h^a_{ij}h^a_{mi}K_{mkjk}-\sum N(H_aH_\beta-H_\beta H_a)-\sum S^2_{a\beta}.$$

记N的Ricci曲率在M上的极小、极大值分别为k_1、k_2，由共形平坦条件得到：

$$\sum h^a_{ij}h^a_{mk}K_{mijk}+\sum h^a_{ij}h^a_{ij}K_{mkjk}$$

$$=\left(\frac{-nK}{(q-1)(q-2)}+\frac{1}{q-2}\sum K_{kk}\right)S+\frac{n}{q-2}\sum K_{mi}h^a_{mj}h^a_{ij}$$

$$\geq\frac{n}{(q-1)(q-2)}(2(q-1)k_1-qk_2)S.$$

令

$$c_1=\frac{1}{(q-1)(q-2)}(2(q-1)k_1-qk_2), \tag{1.2}$$

有$\sum h^a_{ij}\Delta h^a_{ij}\geq nc_1S-\sum N(H_aH_\beta-H_\beta H_a)-\sum S^2_{a\beta}$.

与［1］中的计算完全相同，可得：

$$\sum h^a_{ij}\Delta h^a_{ij}\geq\left(nc_1-\left(2-\frac{1}{p}\right)S\right)S.$$

从而：

$$\frac{1}{2}\Delta S\geq\sum(h^a_{ijk})^2+\left(nc_1-\left(2-\frac{1}{p}\right)S\right)S. \tag{1.3}$$

3．局部对称共形平坦空间的极小子流形的Simons不等式

由［1］的（2.23）式

$$\begin{aligned}\sum h^a_{ij}\Delta h^a_{ij}=&\sum(4K_{a\beta ki}h^\beta_{jk}h^a_{ij}-K_{ak\beta k}h^a_{ij}h^\beta_{ij})\\&+\sum(2K_{mkik}h^a_{mj}h^a_{ij}+2K_{mijk}h^a_{mk}h^a_{ij})-\sum N(H_aH_\beta-H_\beta H_a)-\sum S^2_{a\beta}\\=&\left(\frac{-nk}{(q-1)(q-2)}+\frac{1}{q-2}\sum K_{kk}\right)S-\frac{n}{q-2}\sum K_{a\beta}S_{a\beta}\\&+\frac{2n}{q-2}\sum K_{mi}h^a_{mj}h^a_{ij}-\sum N(H_aH_\beta-H_\beta H_a)-\sum S^2_{a\beta}\\\geq&\frac{n}{(q-1)(q-2)}(3(q-1)k_1-(2q-1)k_2)S\\&-\sum N(H_aH_\beta-H_\beta H_a)-\sum S^2_a.\end{aligned}$$

令

$$c_2=\frac{1}{(q-1)(q-2)}(3(q-1)k_1-(2q-1)k_2), \tag{1.4}$$

则 $\sum h^a_{ij}\Delta h^a_{ij}\geq nc_2S-\sum N(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)-\sum S_\alpha^2$，所以

$$\frac{1}{2}\Delta S\geq\sum(h^a_{ijk})^2+(nc_2-(2-\frac{1}{p})S)S. \tag{1.5}$$

§ 2 主要定理及其证明

定理 1 设 M 是 N 的 n（≥ 2）维紧致极小的co—子流形．若 $0\leq S\leq\frac{nc_1}{2-1/p}$（$c_1$ 为(1.3)式所定义），那么 S 为常数，且 M 仅为下列情形之一：

Ⅰ．当 $p=1$ 时，

i）M 全测地；

ii）M 局部上是一个Riemannian直积 $M\supset U=M_0\times M_1$，$\dim M_0=m\geq 1$，$\dim M_1=n-m$．当 $n\geq 5$ 时，M_0 与 M_1 至少有一个为常曲率空间．在适当选取的标架下，N 的联络形式限制到 M 上为：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
w_{11} & \cdots & w_{1m} & & & & -\lambda w_1\\
\vdots & & \vdots & & 0 & & \vdots\\
w_{m1} & & w_{mm} & & & & -\lambda w_n\\
\hline
 & & & w_{m+1\,m+1} & \cdots & w_{m+1\,n} & -\mu w_{m+1}\\
 & 0 & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
 & & & w_{nm+1} & \cdots & w_{nn} & -\mu w_n\\
\hline
\lambda w_1 & \cdots & \lambda w_m & \mu w_{m+1} & \cdots & \mu w_n & 0
\end{array}\right]$$

其中 λ、μ 为常数；而当 $N=S^{n+1}(1)$ 时，M 为Clifford环面．

Ⅱ．当 $p\geq 2$ 时，必有 $n=p=2$，$S=\frac{4}{3}c_1$．M 的截曲率恒正．在适当选取的标架下 N 的联络形式限制到 M 上为：

$$\begin{bmatrix}
0 & w_{12} & \mu w_2 & -\mu w_1\\
w_{21} & 0 & \mu w_1 & \mu w_2\\
\lambda w_2 & \lambda w_1 & 0 & 2w_{12}\\
-\lambda w_1 & \lambda w_2 & 2w_{11} & 0
\end{bmatrix}$$

其中 λ，μ 为常数，当 $N=S^4(1)$ 时，M 为Veronese曲面．

定理 2 设 M 是局部对称共形平坦空间 N 的 n（≥ 2）维紧致极小子流形．若 $0\leq S\leq\frac{nc_2}{2-1/p}$，（$c_2$ 为（1.4）式所定义），那么与定理 1 有相同的结论．

定理 2 的证明与定理 1 完全相同，故只证明定理 1 成立．

证明 由（1.3）式及所设条件，知 $\Delta S\geq 0$，由Hopf引理，S 为常数．若 $S\neq 0$，则 $S=\frac{nc_1}{2-1/p}$ 且 $h^a_{ijk}=0\quad\forall aijk$．

Ⅰ．当 $p=1$ 时，$S=nc_1=\frac{1}{n-1}(2nk_1-(n+1)k_2)$，$h_{ijk}=0\quad\forall ijk$．在主曲率标

架下，$h_{ij}=0$（$i\neq j$）. 因 $0=\sum\limits_k h_{iik}w_k=dh_{ii}$，故$M$的主曲率为常数。而对 $i\neq j$，$0=\sum h_{ijk}w_k=(h_{jj}-h_{ii})w_{ij}$. 当$h_{jj}\neq h_{ii}$时，$w_{ij}=0$；$0=dw_{ij}=w_{n+1i}\wedge w_{n+1j}+\frac{1}{2}\sum K_{ijkm}w_k\wedge w_m$，将$w_{n+1i}=\sum h_{ij}w_j$及共形平坦条件代入：

$$0=h_{ii}h_{jj}w_i\wedge w_j+\left(\frac{-K}{n(n-1)}+\frac{1}{n-1}(K_{ii}+K_{jj})\right)w_i\wedge w_j+\frac{1}{n-1}\sum_{m(\neq i)}K_{im}w_m\wedge w_j$$
$$+\frac{1}{n-1}\sum_{m(\neq i)}K_{jm}w_i\wedge w_m,$$

得

$$\begin{cases} h_{ii}h_{jj}=\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{K}{n}-K_{ii}-K_{jj}\right) & h_{ii}\neq h_{jj} \\ K_{im}=K_{jm}=0 & m=i,\quad m\neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

若有$i.j.k$使$h_{ii}\neq h_{jj}$，$h_{jj}\neq h_{kk}$，$h_{ii}\neq h_{kk}$，那么$h_{ii}(h_{jj}-h_{kk})=\frac{1}{n-1}(K_{kk}-K_{jj})$，或

$h_{ii}=\dfrac{1}{n-1}\dfrac{K_{kk}-K_{jj}}{h_{jj}-h_{kk}}$.

因为此式对所有满足（2.1）式的h_{ii}成立，故M的第二基本形式的特征值至多有三个不同的值.

若M有三个不同的特征值a_1，a_2，a_3，不妨设：

$$\begin{cases} h_{ii}=a_1 & 0=n_0<i\leq n_1 \\ h_{jj}=a_2 & n_1<j\leq n_2 \\ h_{kk}=a_3 & n_2<k\leq n_3=n \end{cases}$$

而$a_1a_2=\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{K}{n}-K_{ii}-K_{jj}\right)\leq\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{n+1}{n}k_2-2k_1\right)=-\dfrac{S}{n}<0$，同理，$a_1a_3<0$，$a_2a_3<0$，矛盾!

若M有两个不相同的特征值a，b；设$h_{ii}=a$，（$n_0<i\leq n_1$）；$h_{ii}=b$，（$n_1<i\leq n_2=n$）. 那么两个分布$w_i=0$，$n_\lambda<i\leq n_{\lambda+1}$（$\lambda=0$，$1$），是局部完全可积的. 积分流形记为$M_\lambda$（$\lambda=0$，$1$），则$M\supset U=M_0\times M_1$.

考查M_0与M_1的曲率. 取i，j，使$n_0<i\leq n_1$，$n_1<j\leq n_2$，有$ab=\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{K}{n}-K_{ii}-K_{jj}\right)$

或$K_{ii}=\dfrac{K}{n}-(n-1)ab-K_{jj}$.因而可推知，当$n_\lambda<i$，$k\leq n_{\lambda+1}$时，有$K_{ii}=K_{kk}$. 对$n_\lambda<i,j,k,m\leq n_{\lambda+1}$（$\lambda=0$，1），由Gauss方程$R_{ijkm}=\left(h_{ii}^2-\dfrac{K}{n(n-1)}+\dfrac{2}{n-1}K_{ii}\right)(\delta_{ik}\delta_{jk}-\delta_{im}\delta_{jk})$，记$R_{ik}=\sum\limits_{j=n_\lambda}^{n_{\lambda+1}}R_{ijkj}$，$\widetilde{R}=\sum\limits_{j=n_\lambda}^{n_{\lambda+1}}R_{mm}$，则

$$h_{ii}^2-\frac{K}{n(n-1)}+\frac{2}{n-1}K_{ii}=\frac{\widetilde{R}}{n_{\lambda+1}(n_{\lambda+1}-1)}.$$

所以

$$R_{ijkm}=\frac{\widetilde{R}}{n_{\lambda+1}(n_{\lambda+1}-1)}(\delta_{ik}\delta_{jk}-\delta_{im}\delta_{jk}).$$

不难知，当$n_{\lambda+1}\geq 3$时，$\widetilde{R}$ = 常数．因而当$n\geq 5$，必有M_0或M_1为常曲率空间．特别当$N=S^{n+1}(1)$时，$k_1=k_2=K_{AA}\equiv n$，$S\equiv nc_1=n$，由［1］知，M为Clifford环面。

Ⅱ．当$p\geq 2$时，$S\equiv\dfrac{nc_1}{2-1/p}$；由［1］中的（3.5）——（3.10）诸式，知$\sigma_1^2=\sigma_2$且

$$N(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)=2N(H_\alpha)N(H_\beta).$$

再由［1］的引理1，知至多有两个H_α（$\alpha=n+1$，…，$n+p$）不为零．不妨设$H_{n+1}=\lambda A$，$H_{n+2}=\mu B$，λ，$\mu\neq 0$其中

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \widetilde{B}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right].$$

与［1］的证明完全相同，可以证明$p=2$，λ、μ均为常数；且$\lambda^2=\mu^2$；$w_{1j}=0$，$w_{2j}=0$（$j\geq 3$）．下面证明$\dim M=2$．

对于$j\geq 3$，$0=dw_{1j}=\dfrac{1}{2}\sum R_{1jkm}w_k\wedge w_m$，但

$$R_{1jkm}=K_{1jkm}+\sum_\alpha(h_{1k}^\alpha h_{jm}^\alpha-h_{1m}^\alpha h_{jk}^\alpha)=K_{1jkm}.$$

将共形平坦条件代入，得到：

$$\frac{2}{q-2}\left(\frac{-K}{q-1}+K_{11}+K_{jj}\right)w_1\wedge w_j+\frac{2}{q-2}\sum_{k\neq 1}K_{1k}w_k\wedge w_j$$

$$+\frac{2}{q-2}\sum_{k\neq j}K_{jk}w_1\wedge w_k=0 \tag{2.2}$$

注意到：$S=\dfrac{nc_1}{2-1/p}=\dfrac{2n}{3}\dfrac{1}{(q-1)(q-2)}(2(q-1)k_1-qk_2)$，所以

$$\frac{-K}{q-1}+K_{11}+K_{jj}\geq\frac{-qk_2}{q-1}+2k_1=\frac{3(q-2)}{2n}S>0.$$

由（2.2）式便知：$w_1\wedge w_j=0$（$\forall j\geq 3$）．类似得$w_2\wedge w_j=0$（$\forall j\geq 3$）．由此知$\forall j\geq 3$，$w_j=0$．所以$\dim M=2$．进而，$S=\dfrac{4}{9}(3k_1-2k_2)$，$\lambda^2=\dfrac{1}{9}(4k_1-3k_2)$．

由$4k_1-3k_2>0$，知$k_1>3(k_2-k_1)\geq 0$，那么它的曲率：

$$R_{1212}=K_{1212}+\sum_\alpha(h_{11}^\alpha h_{22}^\alpha-h_{12}^\alpha h_{21}^\alpha)$$

$$=\frac{-K}{6}+\frac{1}{2}(K_{11}+K_{22})-(\lambda^2+\mu^2)\geq\frac{1}{9}k_1.$$

通过调整e_3，e_4，我们总可以设$-\lambda=\mu$；令$\alpha=3$，$i=j=1$，则$0=dh_{11}^3=2\lambda w_{21}-\mu w_{43}$，所以

$$w_{43}=2w_{21}.$$

因而联络形式如定理所述．

当$N=S^4(1)$时，$k_1=k_2=K_{AA}=3$，故$S=\dfrac{4}{3}-\lambda=\mu=\sqrt{1/3}$，由［1］知，$M$为

Veronese曲面．至此，完全证明了定理．

在本文所定义的共形平坦的意义下，任意3维Riemannian流形都是共形平坦的，因而有下面的两个推论．

推论1 设N是3维Riemannian流形，M是N的紧致极小co一超曲面．若$0\leq S\leq nc_1$，那么S为常数，且M仅为下列情形之一：

i）M全测地；

ii）M局部上是一个Riemannian直积$M\supset U=M_0\times M_1$，$\dim M_0=\dim M_1=1$；在适当选取的标架下，N的联络形式限制到M上为：

$$\begin{bmatrix} w_{11} & 0 & -\lambda w_1 \\ 0 & w_{22} & -\mu w_2 \\ \lambda w_1 & \mu w_2 & 0 \end{bmatrix}$$

其中λ、μ为常数；当$N=S^3(1)$时，M为Clifford环面．

推论2 设N是3维局部对称空间，M是N的紧致极小超曲面．若$0\leq S\leq nc_2$，那么与推论1有相同的结论．

感谢孙振祖教授给予指导和帮助！

参 考 文 献

[1] S.S.Chern, M. Do Carmo & S.Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Shiing-Shen Chern Selected Papers, Springer—Verlag.

[2] 水乃翔，数学研究与评论，3(1987)，379—382.

Minimal Submanifolds of a Conformally Flat Space

Chen Jianhua

(Jinzhou Teacher's College)

Abstract

S.S.Chern, M.DoCarmo & S.Kobayashi discussed compact minimal submanifolds in $S^{n+p}(1)$. In this article, we generalize their results to the conformaily flat space.