第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

奇异积分中的一些问题*

孙质彧
(杭州大学数学系)

设 $n\geqslant 2$, Ω 为 R^n 中单位球面 S^{n-1} 上的可积函数且 Ω 在 S^{n-1} 上的平均值为零，即

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0.$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 为 S^{n-1} 上的体积元．定义奇异积分算子 T_0，

$$T_0f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}h(|y|)\Omega\left(\frac{y}{|y|}\right)\cdot|y|^{-n}f(x-y)\mathrm{d}y,$$

和相应的极大算子 T^*，

$$T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|,\quad \forall x\in R^n,$$

其中 $h\in L^\infty(R^+)$．关于算子 T 和 T^* 已有许多研究（[1]—[6]等）．在1986年，Namazi利用Fourier 变换的 Hausdorff-Young 不等式证明了

定理N [5] 设 $n\geqslant 2$, $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(1<q\leqslant\infty)$，那么算子 T_0 是 $L^p(R^n)$ 上的有界算子，$1<p<\infty$，即

$$\left(\int|T_0f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant C_p\left(\int|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Chen 改进了 Namazi 的结论且证明了

定理C [1] 设 $n\geqslant 2$, $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(1<q\leqslant\infty)$，那么算子 T^* 是 $L^p(R^n)$ 上的有界算子，$1<p<\infty$.

在1986年，Shi 利用逼近方法证明了

定理S [6] 设 $\omega_1(\Omega,t)$ 为 Ω 的 L^1 连续模，即

$$\omega_1(\Omega,t)=\sup_{\substack{|\rho|<t\\ \rho\in SO(n)}}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho x)-\Omega(x)|\mathrm{d}\sigma(x).$$

其中对于正交群 $SO(n)$ 中的元素 ρ，$|\rho|=\sup_{x\in S^{n-1}}|\rho x-x|$．如果 $\int_0^1\frac{\omega_1(\Omega,t)}{t}\mathrm{d}t<\infty$，那么算子 T_0 是 L^2 有界算子．更进一步地，如果 $\omega_1(\Omega,t)=O(t^\eta)$ $(\eta>0)$，那么 T_0 是 L^p 有界算子，$1<p<\infty$.

注意到在定理N、定理C和定理S的证明中，L^2 有界性是重要的一步．我们也知道条件 Ω 的 L^1 连续模 $\omega_1(\Omega,t)$ 满足 $\int_0^1\frac{\omega_1(\Omega,t)}{t}\mathrm{d}t<\infty$ 与条件 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(1<p\leqslant\infty)$ 是互不

* 1989年12月27日收到.

包含的，另一面，当 Ω 的L^1 连续模$\omega_1(\Omega,t)$满足$\int_0^1 \frac{\omega_1(\Omega,t)}{t}dt<\infty$时 Ω 是属于$L\log^{t}L$的，即

$$\int_{S^{n-1}}|\Omega(x)|\max(\log|\Omega(x)|,0)\,d\sigma(x)<+\infty.$$

最近，Christ & Rubio 研究了算子T_0的弱(1,1)有界性且证明了

定理 CR [2] 如果$\|\Omega\|_\infty+\|\nabla\Omega\|_\infty<\infty$，那么$T_0$是弱（1,1）有界算子，即

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\,|\{x;\ |T_0f(x)|>\lambda\}|\leqslant C\|f\|_1,$$

其中∇表示流形 S^{n-1} 上的梯度.

由此，施咸亮教授建议作者考虑下面的两个问题.

问题 1 设 $n\geqslant 2$, $\Omega\in L\log^{t}L(S^{n-1})$. T_0 是否是 $L^2(R^n)$ 上的有界算子？

问题 2 [7] 设 $\omega_1(\Omega,t)=O(t^\eta)$ $(\eta>0)$. T_0 是否是弱（1,1）有界算子？

我们利用一个新的Fourier 积分估计和Ω 的取值分解，以完全不同于〔1〕,〔5〕,〔6〕中的方法解决了问题 1 . 我们证明了

定理 1 如果$n\geqslant 2$, $\Omega\in L\log^{t}L(S^{n-1})$，那么$T_0$ 是$L^2(R^n)$ 上的有界算子.

定理 2 如果$n\geqslant 2$, $\Omega\in L(\log^{t}L)^{3/2}(S^{n-1})$，那么$T^*$是$L^2(R^n)$ 上的有界算子，其中

$$L(\log^{t}L)^{3/2}(S^{n-1})=\{\Omega\in L^1(S^{n-1}),\int_{S^{n-1}}|\Omega(x)|\cdot(\max(\log|\Omega(x)|,0))^{3/2}d\sigma(x)<+\infty\}$$

利用球面上函数的逼近和〔2〕中证明Calderon-Zygmund 类型奇异积分算子弱（1,1）有界性的技巧，我们解决了问题 2 且证明了

定理 3 如果$n\geqslant 2$, $\int_0^1\frac{\omega_1(\Omega,t)}{t}dt<\infty$，那么$T_0$是弱（1,1）有界算子.

参 考 文 献

〔1〕L—K Chen, Studia Math., 85(1987), 61—72.
〔2〕M.Christ & J.L.Rubio de Francia, Invent, Math., 93(1988), 225—237.
〔3〕J.Duoandikoetxea & J.L.Rubio de Francia, Invent. Math., 84(1986), 541—561.
〔4〕R. Fefferman, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 266—270.
〔5〕J. Namazi, Proc. Amer. Math. Soe., 96(1986), 421—424.
〔6〕X.Shi, Indiana Univ. Math. J., 35(1986), 103—116.
〔7〕施咸亮，数学研究与评论，8(1988), 643—646.

Some Problems about Singular Integral Operator

Sun Qiyu

(Hangzhou University)

In the present paper, we study L^2 boundedness and weak (1,1) boundedness for a class of singular integral operators defined by

$$T_0f(x)=\mathrm{P.V.}\,H*f(x),$$

where $H(x)=h(|x|)K(x)$, h is a bounded function and $K(x)$ is a classical kernel.