第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

非h强竞赛图及其得分向量*

李炯生
（中国科技大学数学系，合肥）

§1 引 言

设n阶竞赛图T_n的顶点集合为$V(T_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$．$T_n$中顶点$v$的得分记作$s(v)$．记$s(v_i)=r_i$，$i=1,2,\cdots,n$．可以重排$V(T_n)$中的顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$，使得$r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_n$．则$R_n=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$是$T_n$的得分向量．所有以$R_n$为得分向量的不同构的竞赛图集合记作$\mathcal{T}(R_n)$．设$U\subseteq V(T_n)$，$T_n$中删掉$U$的子竞赛图记作$T_n-U$．特别，当$U=\{v\}$时，记$T_n-U$为$T_n-v$．对于$U,W\subseteq V(T_n)$，$T_n$中所有由$U$指向$W$的边集合记作$U\mathrm{dom}W$．$|X|$表示集合$X$的基数．

文〔1〕引进了如下定义．

定义1 设T_n是n阶竞赛图，h是正整数，$1\leqslant h\leqslant n-2$．如果对任意$U\subseteq V(T_n)$，$|U|=h-1$，子竞赛图$T_n-U$是强的，则$T_n$称为$h$强的．

显然，“1强”等价于“强”，在〔1〕中，“2强”也称为“超强”(superstrong)．C. Thomassen〔2〕则称“2强”为“2连通”(2-connected)．

仿照S.B. Rao〔3〕，有下面的定义．

定义2 设$R_n=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$是得分向量．如果$\mathcal{T}(R_n)$中含有非h强竞赛图，则R_n称为隐含非h强(potentially non-h-strong)．

L. W. Beineke与K.S. Bagga在1985年美国纽约科学院年会上宣读了他们关于超强竞赛图的工作（见〔4〕），其中包含了他们给出的关于得分向量R_n为隐含非超强的判准，他们的结论是

定理3 设R_n是某个强竞赛图的得分向量．则R_n为隐含非超强的充要条件是，存在正整数k，使得

$$r_1+r_2+\cdots+r_k\leqslant\binom{k+1}{2},$$

$$r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+1}\leqslant\binom{k}{2}+n-1.$$

本文的目的是把L.W.Beineke与K.S.Bagga的上述结论推广到一般非h强竞赛图上．

§2 主要结论

下面是本文的主要结论．

* 1989年11月11日收到．

定理 4 设整数 h 满足 $2\leqslant h\leqslant n-2$. 则得分向量 $R_n=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 为隐含非 h 强的充要条件是，存在正整数 $k\leqslant n-h$，使得

$$r_1+r_2+\cdots+r_k\leqslant\binom{k}{2}+(h-1)k, \tag{1}$$

且对每个整数 i，$1\leqslant i\leqslant h-1$，均有

$$r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+h-i}+\cdots+r_{k+h-1}\leqslant\binom{k+i}{2}+i(n-k-i)+k(h-1-i). \tag{2}$$

证明 必要性. 设 $R_n=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 是隐含非h强的. 则 $\mathscr{T}(R_n)$ 中含有非h强竞赛图 T_n. 由定义1，存在 $X=\{u_1,u_2,\cdots,u_{h-1}\}\subseteq V(T_n)$，使得 T_n-X 是可约的. 于是 T_n-X 的顶点集合 $V(T_n-X)$ 具有划分 (A,B)，$A,B\neq\phi$，使得 $A\mathrm{dom}B=\phi$. 因此，

$$\begin{aligned}\sum_{v\in A}s(v)&=|A\mathrm{dom}V(T_n)|\\&=|A\mathrm{dom}A|+|A\mathrm{dom}X|+|A\mathrm{dom}B|.\end{aligned}$$

记 $|A|=k$，则 $k=n-h+1-|B|\leqslant n-h$，且

$$|A\mathrm{dom}A|=\binom{k}{2},\qquad |A\mathrm{dom}X|\leqslant(h-1)k.$$

所以，

$$r_1+r_2+\cdots+r_k\leqslant\sum_{v\in A}s(v)\leqslant\binom{k}{2}+(h-1)k,$$

即式（1）成立. 其次，设 $Y\subseteq X$，$1\leqslant|Y|=i\leqslant h-1$，并且对任意 $y\in Y$ 和 $z\in Z=X\setminus Y$，有 $s(y)\geqslant s(z)$，则

$$\begin{aligned}\sum_{v\in A\cup Y}s(v)&=|(A\cup Y)\mathrm{dom}V(T_n)|\\&=|(A\cup Y)\mathrm{dom}(A\cup Y)|+|A\mathrm{dom}Z|+|A\mathrm{dom}B|+|Y\mathrm{dom}(Z\cup B)|.\end{aligned}$$

由于

$$|(A\cup Y)\mathrm{dom}(A\cup Y)|=\binom{k+i}{2},\qquad |A\mathrm{dom}B|=0,$$
$$|A\mathrm{dom}Z|\leqslant k(h-1-i),\qquad |Y\mathrm{dom}(Z\cup B)|\leqslant i(n-k-i),$$

所以

$$r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+h-i}+\cdots+r_{k+h-1}\leqslant\sum_{v\in A\cup Y}s(v)\leqslant\binom{k+i}{2}+i(n-k-i)+k(h-1-i),$$

即式（2）成立.

充分性. 设对得分向量 $R_n=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，存在正整数 k，$1\leqslant k\leqslant n-h$，使得式（1）和（2）成立. 设 $T_n\in\mathscr{T}(R_n)$，并记 $V(T_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$U=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$，$X=\{v_{k+1},v_{k+2},\cdots,v_{k+h-1}\}$，$W=\{v_{k+h},v_{k+h+1},\cdots,v_n\}$. 假设对所有 $T_n\in\mathscr{T}(R_n)$. T_n-X 都是强的. 在所有 $T_n\in\mathscr{T}(R_n)$ 中，选取 $T_n\in\mathscr{T}(R_n)$，使得在 T_n 中由 U 指向 W 的边数为最小. 对如此选取的 $\widetilde{T}_n$，有

（i）存在 $x_0\in X$，$u_0\in U$，使得 $x_0\to u_0$. 否则对每个 $x\in X$ 和每个 $u\in U$，均有 $u\to x$. 因此 $|U\mathrm{dom}X|=k(h-1)$. 因为 $\widetilde{T}_n-X$ 是强的，因此 $\widetilde{T}_n$ 含有由 U 指向 W 的边，即 $|U\mathrm{dom}W|\geqslant1$. 于是，

$$\begin{aligned}r_1+r_2+\cdots+r_k=\sum_{u\in U}s(u)&=|U\mathrm{dom}V(\widetilde{T}_n)|\\&=|U\mathrm{dom}U|+|U\mathrm{dom}X|+|U\mathrm{dom}W|\\&\geqslant\binom{k}{2}+k(h-1)+1,\end{aligned}$$

与式（1）矛盾.

（ii）存在 $y_0\in X$，$w_0\in W$，使得 $w_0\to y_0$. 否则对每个 $y\in X$ 和每个 $w\in W$，均有 $y\to w$. 因此 $|X\mathrm{dom}W|=(h-1)(n-k-h+1)$. 因为 $\widetilde{T}_n-X$ 是强的，所以 $|U\mathrm{dom}W|\geqslant 1$. 于是,

$$\begin{aligned} r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+1}+\cdots+r_{k+h-1} &= \sum_{u\in U\cup X} s(u)=|(U\cup X)\mathrm{dom}V(\widetilde{T}_n)| \\ &= |(U\cup X)\mathrm{dom}(U\cup X)|+|X\mathrm{dom}W|+|U\mathrm{dom}W| \\ &\geqslant \binom{k+h-1}{2}+(h-1)(n-k-h+1)+1, \end{aligned}$$

与 $i=h-1$ 时的式（2）矛盾.

（iii）对（i）中的顶点 x_0 与（ii）中的顶点 y_0，有 $x_0\neq y_0$. 否则 $x_0=y_0$. 因为 $\widetilde{T}_n-X$ 是强的，因此 $\widetilde{T}_n-X$ 中含有由 u_0 指向 w_0 的有向道路 $u_0z_1z_2\cdots z_sw_0$. 于是 T_n 中含有圈 C: $x_0u_0z_1z_2\cdots z_sw_0y_0$. 将 $\widetilde{T}_n$ 中圈 C 上的每条边都反一方向，其他边的方向保持不动，得到的 n 阶竞赛图记作 T_n^*. 显然，$T_n^*\in\mathscr{T}(R_n)$，而且 T_n^* 中由 U 指向 W 的边数小于 $\widetilde{T}_n$ 中由 U 指向 W 的边数，与 $\widetilde{T}_n$ 的选取矛盾.

（iv）在 $\widetilde{T}_n$ 中由顶点子集 X 导出的子竞赛图 $T[X]$ 是可约的. 否则 $T[X]$ 是强的. 因此 $T[X]$ 含有由（ii）中的顶点 y_0 到（i）中的顶点 x_0 的有向道路 $y_0y_1y_2\cdots y_tx_0$. 又 $\widetilde{T}_n-X$ 是强的，因此 $\widetilde{T}_n-X$ 含有由（i）中的顶点 u_0 到（ii）中的顶点 w_0 的有向道路 $u_0w_1w_2\cdots w_sw_0$. 所以 $\widetilde{T}_n$ 中含有圈 C: $y_0y_1y_2\cdots y_tx_0u_0w_1w_2\cdots w_sw_0$. 将 $\widetilde{T}_n$ 中圈 C 上每条边都反一方向，其他边的方向保持不动，得到的 n 阶竞赛图 $T_n^*\in\mathscr{T}(R_n)$，且 T_n^* 中由 U 指向 W 的边数小于 T_n 的，与 T_n 的选取矛盾.

由于 $T[X]$ 是可约的，因此具有分解 $S_1,S_2,\cdots,S_t$，其中每个 S_i 都是强的，而且当 $1\leqslant i<j\leqslant t$ 时，$T[X]$ 中不含由 $V(S_i)$ 指向 $V(S_j)$ 的边. 与（iii）、（iv）相仿，可以证明，

（v）$T[X]$ 中每个强分支 S_i 不能同时含有（i）中的顶点 x_0 与（ii）中的顶点 y_0.

在 $T[X]$ 中，所有含有形如（i）中的顶点 x_0 的强分支 S_i 中最小的下标记作 j_0. 记 $A=V(S_{j_0})\cup V(S_{j_0+1})\cup\cdots\cup V(S_t)$.

（vi）对每个 $v\in A$ 和每个 $w\in W$，均有 $v\to w$. 否则有某个 $z\in A$ 和某个 $u\in W$，使得 $u\to z$. 由（v）可知，z 所属的强分支 S_i 不同于 S_{j_0}. 因此 $i>j_0$. 于是 $T[X]$ 含有由 z 到 x_0 的有向道路，而 $\widetilde{T}_n-X$ 含有由 u_0 到 u 的有向道路. 与（iii）相仿，由此将导致与 $\widetilde{T}_n$ 的选取的矛盾.

由（ii）和（vi）可知，$j_0>1$. 因此 $1\leqslant|A|=i\leqslant h-2$. 记 $B=X\setminus A$. 由 A 的定义可知，对任意 $z\in B$ 和任意 $u\in U$，均有 $u\to z$，而对任意 $w\in A$，均有 $w\to z$，即 $|U\mathrm{dom}B|=k(h-1-i)$，$|A\mathrm{dom}B|=i(h-1-i)$. 由（vi），$|A\mathrm{dom}W|=i(n-k-h+1)$. 于是,

$$\begin{aligned} r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+h-i}+\cdots+r_{k+h-1} &\geqslant \sum_{u\in U\cup A} s(u) \\ &= |(U\cup A)\mathrm{dom}V(\widetilde{T}_n)| \\ &= |(U\cup A)\mathrm{dom}(U\cup A)|+|U\mathrm{dom}B|+|U\mathrm{dom}W| \\ &\quad +|A\mathrm{dom}B|+|A\mathrm{dom}W| \\ &\geqslant \binom{k+i}{2}+k(h-1-i)+1+i(h-1-i)+i(n-k-h+1), \end{aligned}$$

其中因为$\widetilde{T}_n - X$是强的，故$|U\mathrm{dom}W|\geqslant 1$. 上式显然矛盾于式（2）. 这表明，关于对所有$T_n \in \mathscr{T}(R_n)$，$T_n - X$为强的假设不成立. 因此存在$T_n^* \in \mathscr{T}(R_n)$，使得$T_n^* - X$是可约的，即$\mathscr{T}(R_n)$含有非h强竞赛图$T_n^*$. 定理4证毕.

参 考 文 献

〔1〕李炯生，黄国勋，广西大学学报，2(1988)，1—5.

〔2〕C. Thomossen, J. Combinatorial Theory, 28B(1980), 142—163.

〔3〕S. B. Rao, A survey of theory of Potentially P-graphic and forcibly P-graphic degree sequences, in Lecture Notes in Mathematics, 885(Ed, S. B. Rao), Springer-verlag, 1981, pp441—458.

〔4〕L. W. Beineke and K. S. Bagga, Ann. N. Y. Acad. Sci. 555(1989), 30—39.

Non-h-strong Tournaments and Their Score Vectors

Li Jiongsheng

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

A tournament T_n of order n is said to be h-strong if every subtournament of order $n-h+1$ in T_n is strong, and a score vector $R_n=(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ is said to be potentially non-h-strong if there exists some non-h-strong tournament such that its score vector is R_n. The purpose of this paper is to give a criterion for determining whether a score vector R_n is potentially non-h-strong.