第12卷第1期
1992年2月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 12 No. 1
Feb. 1992

锥可扩的几何刻划及其应用*

韩 志 清
(山东大学数学系，济南 250100)

Krasnosel'skii 在[1]中引入了可扩锥(plastering)的概念并给出了它在研究非线性算子方程正解及正固有元的存在性中的应用，[1]中同时给出了局部紧锥的概念. 该书证明了任何由不包含零点的有界凸闭集张成的锥是可扩的. 本文证明任何可扩锥均可这样张成，并对局部紧锥也得了类似结论，从而明确了这两种锥的几何构造. 最后我们给出了它在研究正固有元存在性中的应用.

设 M 是 Banach 空间 X 中任何一个不含零点的有界凸闭集，令 $K(M)=\{y\,|\,y=tx, x\in M, t\geqslant 0\}$ 则 $K(M)$ 是锥，我们称 $K(M)$ 是由 M 张成的锥. X 中锥 K 称作是可扩的，若存在锥 K_1 及正数 $b>0$ 使任给 $x_0\in K$ 均有 $B(x_0, b\|x_0\|)\subset K_1$，其中 $B(x_0,r)$ 表示 X 中以 x_0 为中心，以 r 为半径的开球. 可扩锥的概念是一个比较广泛的概念，例如若 K 是体锥，则其对偶锥 K^* 是可扩的. 设 $X=C(I)$ (I 为 R^1 中闭区间)，$r>0$，$K_r=\{x\in X\,|\,\max\limits_I x(t)\leqslant r\min\limits_I x(t)\}$，$K=\{I$ 上非负连续凸函数$\}$，则 K_r，K 均是可扩锥.

定理 1 K 是 X 中可扩锥充分必要条件是 K 上有一个一致正线性泛函.

以上事实均可见[1]，[2].

定理 2 Banach 空间 X 中锥 K 可扩的充分必要条件是存在一个不包含零点的有界凸闭集 M 使 $K=K(M)$.

证明 充分性见[1].

必要性 设 K 可扩，由定理 1 存在一致正线性泛函 x^*，即存在 $x^*\in X^*$ 及正数 $b>0$ 满足任给 $x\in K$ 有，$x^*(x)\geqslant b\|x\|$.

令 $M=\{x\in K: x^*(x)=1\}\cap\overline{B}(\theta,\frac{1}{b})$，显然 M 是不包含零点的有界凸闭集.

任给 $x\in K, x\neq\theta$ 则 $x^*(x)>0$. 令 $a=\frac{1}{x^*(x)}>0$ 则 $\|ax\|=a\|x\|=\frac{\|x\|}{x^*(x)}\leqslant\frac{1}{b}$，所以 $ax\in\overline{B}(\theta,\frac{1}{b})$，由于 $x^*(ax)=x^*(\frac{x}{x^*(x)})=1$，故 $ax\in M$. 令 $t=\frac{1}{a}$，$x'=ax\in M$，则 $x=tx'\in K(M)$. 此即 $K\subset K(M)$，又显然 $K(M)\subset K$，所以 $K(M)=K$. 定理证完.

定理 3 K 是局部紧锥充分必要条件是存在不包含零点的凸紧集 M 使 $K=K(M)$.

证明 必要性由定理 2 及局部紧锥的定义立得.

充分性 设存在凸紧集 M 使 $K=K(M)$. 任取有界序列 $\{y_n\}\subset K=K(M)$，存在 $t_n\geqslant 0$，$x_n\in M$ 使 $y_n=t_nx_n$. 由于 $x_n\in M$，由 M 有界及不包含零点知存在正数 $a\geqslant b>0$ 使 $\|y_n\|\leqslant a$，

* 1990年1月18日收到. 国家自然科学基金资助课题.

$b \leqslant \|x_n\| \leqslant a$. 故 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 由于 $\|x_n\| \geqslant b > 0$, $\|y_n\| \leqslant a$, 故 $t_n = \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} \leqslant \frac{a}{b}$, 所以 $\{t_{n_k}\}$ 有子列 $\{t_{n_{k_i}}\}$ 收敛, 由此推得 $\{y_{n_{k_i}}\}$ 收敛. 证毕.

按照[1]的定义, 设 K 是 X 中锥, $A: K \to K$, 若存在 $x \in K$, $x \neq 0$ 及实数 μ 使 $Ax = \mu x$ 则称 x 为正固有元.

定理 4 设 K 是 X 中局部紧锥, $A: K \to K$ 连续, 则存在 K 上一致正线性泛函 x^* 使对任给 $\lambda > 0$ 存在 A 的正固有元 x_λ 满足

(i) $x^*(x_\lambda) = \lambda$;

(ii) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \|x_\lambda\| = \infty$;

(iii) $\lim\limits_{\lambda \to 0_+} \|x_\lambda\| = 0$.

证明 由于 K 局部紧, 从而可扩, 由定理 1 知存在 K 上一致正线性泛函 x^*, 即存在 $x^* \in X^*$ 及常数 $b > 0$ 使任给 $x \in K$ 有 $x^*(x) \geqslant b\|x\|$. 任取 $\lambda > 0$, 令 $M_\lambda = \{x \in K: x^*(x) = \lambda\} \cap \overline{B}(\theta, \frac{1}{b}\lambda)$, 同定理 2 类似可以证明 $K = K(M_\lambda)$.

令 $\Omega_\lambda = \{x \in X: x^*(x) < \lambda\} \cap B(\theta, \frac{1}{b}\lambda)$, 则 Ω_λ 是 X 中有界开集, 容易验证其边界 $\partial\Omega_\lambda = (\{x \in X: x^*(x) = \lambda\} \cap B(\theta, \frac{1}{b}\lambda)) \cup (\{x \in X: x^*(x) < \lambda\} \cap S_{\frac{1}{b}\lambda})$. 从而 $\partial\Omega_\lambda \cap K = M_\lambda$, 所以 M_λ 是 K 中开集 $\Omega_\lambda \cap K$ 的全部边界.

若存在 $0 < \mu \leqslant 1$, $x \in M_\lambda$ 使 $Ax = \mu x$ 则定理证完, 不妨设对任给 $x \in M_\lambda$, $0 < \mu \leqslant 1$ 有

$$Ax \neq \mu x \tag{1}$$

若存在 $x \in M_\lambda$ 使 $Ax = 0$ 则定理也证完, 不妨设任给 $x \in M_\lambda$ 有 $Ax \neq \theta$. 由于 M_λ 是紧凸集且 A 连续, 所以

$$\inf_{x \in M_\lambda} \|Ax\| > 0 \tag{2}$$

由 (1), (2) 注意到[6]中定理即可得 $i(A, \Omega_\lambda \cap K, K) = 0$. 用通常使用的方法可证明在 M_λ 上存在 A 的固有元, 然后注意到 x^* 的一致正可知定理的全部结论成立.

例 1 (Perron — Frobenius 定理) 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 其中 $a_{ij} \geqslant 0$, 则存在 $\lambda \geqslant 0$ 及 $x \neq 0$ 且 $x_i \geqslant 0$(对所有 i) 使 $Ax = \lambda x$.

证明 把 A 看作是欧氏空间 R^n 上的线性映射, K 取作 R^n 中通常的非负锥(显然局部紧), 利用定理 4 知 Perron — Frobenius 定理成立.

以下假定 K 是 X 中锥, $A: K \to K$ 全连续且 $\overline{AK}$ 是 K 之子锥. 例如在 Hammerstein 型积分方程 $A\varphi = \int_G K(x,y) f(y, \varphi(y)) dy = \varphi(x)$ 中令 $K(x,y)$ 非负连续, 在通常的非负函数锥下令 $f(u) = |u|^p$, $f(u) = \log(p + u)$ $(p > 1)$ 等都满足 $\overline{AK}$ 是 K 之子锥.

定理 5 设 K 是 Banach 空间 X 中锥, $A: K \to K$ 全连续且 $\overline{AK}$ 是 K 之子锥. 则在以下任何一个条件下存在 $\overline{AK}$ 上一致正线性泛函 x^* 使任给 $\lambda > 0$, A 有互不相同的正固有元 x_λ 满足定理 4 中 (i), (ii), (iii)

(i) $M \subset K$, $A(M)$ 范数有界 $\Rightarrow M$ 范数有界;

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \in K \\ \|x\| \to +\infty}} \|Ax\| = \infty$;

(iii) 存在正数 $M, a, \beta > 0$ 使当 $x \in K$, $\|x\| \geqslant M$ 时 $\|Ax\| \geqslant a\|x\|^\beta$.

证明 (i) 任取$\overline{AK}$中有界序列$\{y_n\}$，则存在$y'_n \in AK$使$\|y_n - y'_n\| \leqslant \frac{1}{n}$. 从而存在$x'_n \in K$使$y'_n = Ax'_n$. 由$\{y_n\}$有界知$\{y'_n\}$有界，由条件(i)知$\{x'_n\}$有界，故由$A$全连续知$y'_n = Ax'_n$有收敛子列$\{y'_{n_k}\}$，从而$\{y'_{n_k}\}$也收敛，此即证明$\overline{AK}$是局部紧锥.

因$A: K \to K$，所以$\overline{AK} \subset \overline{K} = K$，故$A(\overline{AK}) \subset AK \subset \overline{AK}$此即：$A: \overline{AK} \to \overline{AK}$. 由定理4知条件(i)保证定理5成立.

(ii) 若$M \subset K$，$A(M)$有界但M无界，则存在$\{x_n\} \subset M$使$\|x_n\| \to +\infty$，但由(ii)知$\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n\| = \infty$，此与$A(M)$有界发生矛盾. 所以在条件(ii)下，条件(i)成立.

(iii) 是(ii)之特殊情况.

至此定理全部证完.

推论1 若A是锥K上一致正全连续线性算子，则A必有正固有元.

此推论见[1] p69.

推论2 设Γ是X中某包含原点的开集Ω的边界，K是X中锥，$A: \Gamma \cap K \to K$全连续且$\inf\limits_{x\in\Gamma\cap K}\|Ax\| > 0$，则$A$在$\Gamma$上必有对应正固有值的正固有元.

证明 令$M = \overline{\mathrm{co}}A(\Gamma \cap K) \subset K$，则$M$是不包含零点的凸紧集，其证明见[6]. 从而$K(M) = \{y \mid y = tx, t \geqslant 0, x \in M\}$是$K$之局部紧子锥. 把$A$延拓到整个$K$上，记为$\widetilde{A}$使$\widetilde{A}$满足$\widetilde{AK} \subset \overline{\mathrm{co}}A(\Gamma \cap K) \subset K(M)$. 从而$\widetilde{A}: K(M) \to K(M)$，由定理4之证明知在$K(M) \cap \Gamma$上存在$\widetilde{A}$的正固有元$x$，相应固有值为$\lambda$即$\widetilde{A}x = \lambda x$. 由于$\widetilde{A}|_{\Gamma\cap K} = A|_{\Gamma\cap K}$，所以$Ax = \lambda x$，显然$\lambda > 0$，证毕.

上述推论即为著名的Birkhoff — Kellogg定理在锥上的情形，可见[1]， p161.

注 假设定理5之条件(ii)满足，则存在$R_0 > 0$使当$R \geqslant R_0$时有$\inf\limits_{\partial B_R\cap K}\|Ax\| > 0$，则由推论2知$A$在$\partial B_R \cap K$是有正固有元，但当$R < R_0$时由于$\inf\limits_{\partial B_R\cap K}\|Ax\| > 0$可能得不到满足，从而推论2不能保证$A$在$\overline{B}_R \cap K$中有正固有元，但由定理5知$A$在任何$\overline{B}_R \cap K$中均有$C$个正固有元. 因此定理5可看作是Birkhoff — Kellogg定理在一定条件下的推广.

例2 考察非线性积分方程

$$\int_G K(x,y)\varphi^p(y)dy = A\varphi(x) = \varphi(x),$$

其中$p > 1$适当选取使上述方程有意义，$K(x,y)$在$G \times G$上非负连续，$\int_G K(x,y)dx > 0 (\forall\, y \in G)$，$G$是$R^N$中有界闭集.

令$X = L^p(G)$，K是X中非负函数锥，下证$\overline{AK}$是K之子锥.

任取$\psi_1, \psi_2 \in AK$，$\psi_i = \int_G K(x,y)\varphi_i^p(y)dy (i = 1,2)$则$\psi_1 + \psi_2 = A\varphi$，其中$\varphi = (\varphi_1^p + \varphi_2^p)^{\frac{1}{p}} \in K$；从而$\psi_1 + \psi_2 \in AK$，同理可证任取$k \geqslant 0$，$k\psi_1 \in AK$.

任取$\psi_1, \psi_2 \in \overline{AK}$，存在$\psi_1^n, \psi_2^n \in AK$使$\psi_1^n \to \psi_1$，$\psi_2^n \to \psi_2$所以$\psi_1^n + \psi_2^n \to \psi_1 + \psi_2$，从而$\psi_1 + \psi_2 \in \overline{AK}$，同理可证任取$k \geqslant 0$有$k\psi_1 \in \overline{AK}$，从而$\overline{AK}$是$K$之子锥.

容易验证$A: K \to K$全连续.

任取$\varphi(x) \in K$，由Hölder不等式有

$$\|A\varphi\|_{L^p} = \{\int_G(\int_G K(x,y)\varphi^p(y)dy)^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant (\mathrm{mesG})^{\frac{1}{p}-1}\int_G dx\int_G K(x,y)\varphi^p(y)dy$$

$$\geqslant \beta(\mathrm{mesG})^{\frac{1}{p}-1}\ \|\varphi\|^{p}_{L^p}.$$

其中 $\beta=\min\limits_{y\in G}\int_G K(x,y)dx>0$. 对这类方程定理 5 的所有条件满足,从而定理 5 对这类方程成立.

作者对郭大钧教授的指导与鼓励表示衷心感谢. 另外孙经先副教授审阅了初稿并提了宝贵意见,一并致谢.

参考文献

[1] M. A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Groningen: Noordhoff, 1964.
[2] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysys*, Springer—Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
[3] 郭大钧,非线性泛函分析,山东科技出版社,1985.
[4] J. Cronin, J. Math. Anal. Appl. ,38(1972),659—667.
[5] 陈文嫄,非线性泛函分析,甘肃人民出版社,1982.
[6] 郭大钧,科学通报, 28(1983), 1217—1219.
[7] 孙经先, 数学学报, 30(1987), 264—267.

On the Geometric Property and Application of a Cone Which Allows Plastering

Han Zhiqing
(Dept. of Math., Shandong University, Jinan, China)

Abstract

In this paper, we shall show that a cone which allows plastering is generated by a bounded, closed and convex set that does not contain the zero of the Banach space X. We then use this result to investigate the existence of characteristic vectors of nonlinear (linear) operators.