第12卷第1期 1992年2月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol. 12 No. 1 Feb. 1992

矩阵指数的偏迹不等式*

陈　灵
(暨南大学数学系,广州 510632)

§1 引　言

设 C 是 n 阶复数矩阵,记 $C^{(k)}$ 是 C 的 k-项复合矩阵($k=1,2,\cdots,n$),即 $C^{(k)}$ 是一个 N 阶矩阵,$N=\binom{n}{k}$,它的元素是由 C 中的所有 k 阶子式所组成,足标由 C 的行标和列标用字典排序决定(见[4],或[5]241－242,或[6]19－20).

记 C^* 是 C 的共轭转置矩阵,即 $C^*=\overline{C}^T$.

C 的复合矩阵 $C^{(k)}$ 有如下性质.

1)　$C^{(1)}=C, C^{(n)}=\det C$.

2)　$[C^{(k)}]^r=(C^r)^{(k)}$, r 是正整数;$[C^{(k)}]^*=(C^*)^{(k)}$;

$(C^{-1})^{(k)}=[C^{(k)}]^{-1}$;$(C_1C_2)^{(k)}=C_1^{(k)}C_2^{(k)}$, C_1,C_2 是 n 阶复数矩阵.

3)　记 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 C 的 n 个特征根,则 $C^{(k)}$ 的 N 个特征根为 $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}$, $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.

若 $\lambda_j(C^{(k)})$ 是 $C^{(k)}$ 的全部特征根($j=1,2,\cdots,N$),且 $|\lambda_1(C^{(k)})|\geqslant|\lambda_2(C^{(k)})|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_N(C^{(k)})|$,定义 C 的偏迹如下:

$$\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)=\sum_{h=1}^{i}\lambda_h(C^{(k)}),\qquad i=1,2,\cdots,N,$$

易见

1)　$\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)=\mathrm{tr}_i^{(1)}(C^{(k)})$.

2)　$\mathrm{tr}_n^{(1)}(C)=\mathrm{tr}C=$ 矩阵 C 的迹数.

3)　$|\mathrm{tr}_1^{(1)}(C)|=|\lambda_1(C)|=$ 矩阵 C 的谱半径.

4)　$\mathrm{tr}_i^{(k)}(\lambda C)=\lambda^k\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)$, λ 是复数.

5)　$\mathrm{tr}_i^{(k)}(P^{-1}CP)=\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)$, P 是 n 阶可逆矩阵.

6)　当 C 是半正定 Hemite 矩阵时,有 $\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)\geqslant 0$.

7)　$\mathrm{tr}_i^{(k)}(C_1C_2)=\mathrm{tr}_i^{(k)}(C_2C_1)$, C_1,C_2 是 n 阶复数矩阵.

Weyl－函数的概念.

如果函数 $f(x)$ 满足

1°　当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 单调增加;

2°　对 t, $f(e^t)$ 是凸函数.

则称 $f(x)$ 是 Weyl－函数,简称为 W－函数 $f(x)$.

* 1990年1月10日收到.

引理 1　如果 λ_j 是 n 阶复数矩阵 C 的特征根($j=1,2,\cdots,n$)，且 $|\lambda_1|\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$，$u_j$ 是 CC^* 的特征根($j=1,2,\cdots,n$)，且 $u_1\geqslant u_2\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant 0$，则对于任意的 W－函数 $f(x)$，必有

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_j|^2)\leqslant\sum_{j=1}^{k} f(u_j),\tag{1}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$.

证明　见[7]p. 228.

§2　偏迹不等式

定理 1　设 C 是 n 阶复数矩阵，r 为正整数，则

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(C^{2r})|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[(CC^*)^r],\tag{2}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n.$，$i=1,2,\cdots,N$. 且当 $C=C^*$ 或 $k=n$ 时，(2)式等号成立.

证明　在引理 1 中，取 $f(x)=x^r$，r 是正整数，显然 $f(x)$ 是 W－函数，如引理 1 的条件，设 λ_j,u_j 分别是 C 及 CC^* 的特征根($j=1,2,\cdots,n$). 由(1)式

$$\sum_{k=1}^{i}|\lambda_k|^{2r}\leqslant\sum_{k=1}^{i}u_k^r\quad i=1,2,\cdots,N.$$

又因为

$$|\sum_{k=1}^{i}\lambda_k^{2r}|\leqslant\sum_{k=1}^{i}|\lambda_k|^{2r},$$

得

$$\mathrm{tr}_i^{(1)}(C^{2r})|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(1)}[(CC^*)^r].$$

上式中 C 换成 $C^{(k)}$，即得到定理 1 的结果.

推论 1　设 A,B 是两个 n 阶复数矩阵，则

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(AB)^{2^p}|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[(A^*A)^{2^{p-1}}(BB^*)^{2^{p-1}}],\tag{3}$$

其中 p 是整态数，$k=1,2,\cdots,n$，$i=1,2,\cdots,N$.

证明　由(2)式得

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}_i^{(k)}(AB)^{2^p}| &\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[ABB^*A^*)^{2^{p-1}}]\\ &=|\mathrm{tr}_i^{(k)}(BB^*A^*A)^{2^{p-1}})|\\ &\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[BB^*A^*A(BB^*A^*A)^*]^{2^{p-2}}]\\ &=\mathrm{tr}_i^{(k)}[BB^*(A^*A)^2BB^*]^{2^{p-2}}]\\ &=\mathrm{tr}_i^{(k)}[(A^*A)^2(BB^*)^2]^{2^{p-1}},\end{aligned}\tag{4}$$

即

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(AB)^{2^p}|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[(A^*A)^2(BB^*)^2]^{2^{p-2}}.\tag{5}$$

重复利用(4)、(5)式的方法，证毕.

§3　矩阵指数偏迹不等式

定理 2　设 A,B 是两个 n 阶复数矩阵. 则

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{A+B})|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{\frac{A+A^*}{2}}e^{\frac{B+B^*}{2}}),\tag{6}$$

其中　$k=1,2,\cdots,n$，$i=1,2,\cdots,N$.

证明　在推论 1 中，A 用 $e^{2^{-p}A}$ 代，B 用 $e^{2^{-p}B}$ 代，得

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{2^{-p}A}e^{2^{-p}B}|\leqslant\mathrm{tr}_i^{(k)}[(e^{2^{-p}A}e^{2^{-p}A^*})^{\frac{2^p}{2}}(e^{2^{-p}B}e^{2^{-p}B^*})^{\frac{2^p}{2}}.$$

令上式 $p\to\infty$，且利用 $\lim\limits_{p\to\infty}(A^{\frac{A}{p}}e^{\frac{B}{p}})^{p}=e^{A+B}$. 证毕.

推论 2 当 A,B 均为 Hermitian 矩阵时，则

$$\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{A+B})\leqslant \mathrm{tr}_i^{(k)}(e^Ae^B) \tag{7}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots,N$. 且当 A,B 可换或 $k=n$ 时，(7)式等号成立.

特别地，(7)式中，取 $k=1,i=n$ 时，得到[2]的结果.

推论 3 当 A 是反 Hermitian 矩阵时，则

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{A+B})|\leqslant \mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{\frac{B+B^*}{2}}) \tag{8}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots N$.

推论 4 当 A 是反 Hermitian 矩阵，B 是 Hermitian 矩阵时，则

$$|\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{A+B})|\leqslant \mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{B}). \tag{9}$$

最后(7)推广到多个矩阵的情形是不成立的(见[2]. 另(7)式等号成立的充分必要条件有待研究.

参考文献

[1] S. Golgen, Phys. Rev. 137(1965), B1127—B1128.

[2] C. J. Thompson, J. Math. Phys., 6(1965), 1812—1823.

[3] Dennis S. Bernstein, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 9(1988), 156—158.

[4] Joel E. Cohen, Linear Algcbra Appl., 111(1988), 25—28.

[5] Richard Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, *2nd ed.*, New York, 1970.

[6] Roger A. Horn and Charles R. Jonnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 1985.

[7] T. Ando, Linear Algebra Appl., 118(1989), 163—248.

Inequalities for the Partial Trace of Matrix Exponential

Cheng Ling

(Dept. of Math., Jinan University, Guangzhou, China.)

Abstract

In this paper it is shown that if C is an $n\times n$ complex matrix and $C^{(k)}$ is the k−th compound of C, $1\le k\le n$, $N=\binom{n}{k}$ and if the eigenvalues of $C^{(k)}$ are labeled in order of decreasing magnitude $|\lambda_1(C^{(k)})|\ge|\lambda_2(C^{(k)})|\ge\cdots\ge|\lambda_N(C^{(k)})|$ define the partial trace $\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)$ by

$$\mathrm{tr}_i^{(k)}(C)=\sum_{h=1}^{i}\lambda_h(C^{(k)})\quad i=1,2\cdots N.$$

Then for two $n\times n$ Hermitian matrices A, B,

$$\mathrm{tr}_i^{(k)}(e^{A+B})\le \mathrm{tr}_i^{(k)}(e^Ae^B),\quad i=1,2\cdots N,$$

with equality holds if A,B are commutative or $k=n$.