第12卷第2期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 2
1992年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1992

亚直不可约环的导子*

傅袒林　　原永久
(哈尔滨科技大学 150080)　(吉林大学数学系，长春 130023)

如果一个环 R，它的所有非零理想之交，仍为 R 的非零理想，就称 R 为亚直不可约环. 它的极小理想称为亚直不可约环的心. 由于任何环同构于一组亚直不可约环的亚直和，无需附加任何其它条件，所以，研究亚直不可约环是非常必要的. 关于环上导子的研究，以前多为讨论质环的情况，未见到对亚直不可约环导子的研究结论. 在本文中我们试图研究亚直不可约环的导子. 找到了一些与质环上导子的类似之处与不同之处.

设亚直不可约环 R 之心为 J. 显然，只有 $J^2=J$ 与 $J^2=0$ 两种情况. 有幂等心的亚直不可约环必为直环.

在本文中主要研究 R 的左零化子 R_l、右零化子 R_r 均为 0 的情况. 只要 R 中至少有一个非零因子，即被包含在此种情况之内. 我们得到的结论，在幂等心的情况之下与质环情形所得结论是一致的.

在文中用 R 表示一个环，$[a,b]$ 表示换位子 $ab-ba$，J 表示亚直不可约环的心，J_l,J_r 分别表示 J 的左、右零化子，d 表示 R 上的导子，dx 有时写成 x'，$I_a(x)$ 表示由 a 引出的内导子 $[a,x]$，C 表示 R 的中心. U 表示 R 的理想，$C_R(U)$ 表示 U 的中心化子.

引理 1　设 R 为亚直不可约环，且 $R_l=R_r=0$，d 为 R 中的导子.

(1)　如果 $ad(x)=0$　$(d(x)b=0)$，对所有 $x\in R$ 成立则 $a\in J_l$ 或 $d=0$ ($b\in J_r$ 或 $d=0$).

(2)　设 U 为 R 的非零理想，且 $U\not\subset J_r\cap J_l$. 如果 $dU=0$，则 $d=0$.

证明　(1)　在 $ad(x)=0$ 中用 xy 代 x 得 $ad(xy)=axd(y)=0$. 若有 $y_1\in R$ 使 $dy_1\neq 0$，则 $0\neq Rdy_1R\supset J$，再由上式知 $aJ=0$，于是 $a\in J_l$.

$d(x)b=0$ 的情况类似的.

(2)　不妨设有 $x\in U$，但 $x\notin J_l$，则 $0=d(xy)=dxy+xdy=xdy$. 由(1)即知 $dR=0$.

一

在这一段中，我们假定 $dR\not\subset J_l\cap J_r$. 当 R 有幂等心时，显然 $J_l\cap J_r=0$. 故非零导子 d 自然满足 $dR\not\subset J_r\cap J_l$，在此假定下，我们得到了与质环的导子相同的若干结论.

定理 1　设 R 如引理 1，且为 2 一扭自由的. d_1、d_2 均为 R 上导子. 设 d_1d_2 仍为 R 上的导子，若 $d_2R\not\subset J_l\cap J_r$，则 $d_1=0$. 若 $d_1R\not\subset J_l\cap J_r$，则 $d_2=0$.

证明　由 d_1d_2 仍为 R 上导子，对任意 $a,b\in R$，将 $d_1d_2(ab)=d_1[d_2(ab)]$ 展开得

$$d_2(a)d_1(b)+d_1(a)d_2(b)=0. \tag{1}$$

设 $d_2R\not\subset J_l$，在(1)中用 $d_2(c)b$ 代 b，并用(1)式化简得

* 1990年8月13日收到.

$$d_2(a)d_2(c)d_1(b)+d_1(a)d_2(c)d_2(b)=0.$$

但由(1)式有 $d_1(a)d_2(c)=-d_2(a)d_1(c)$，于是有

$$d_2(a)[d_2(c)d_1(b)-d_1(c)d_2(b)]=0. \tag{2}$$

如果 $[d_2(c)d_1(b)-d_1(c)d_2(b)]\neq 0$，用 ay 代替(2)中之 a 可得

$$d_2(a)R[d_2(c)d_1(b)-d_1(c)d_2(b)]R\supset d_2(a)J=0.$$

于是 $d_2R\subset J_l$，矛盾. 故有

$$d_2(c)d_1(b)-d_1(c)d_2(b)=0 \tag{3}$$

在(1)式中用 c 代 a 再与(3)式相加得 $2d_2(c)d_1(b)=0$，由 $d_2R\not\subset J_l$ 知有 $x\in R$，$d_2(x)\notin J_l$. 但对所有 $b\in R$ 有 $d_2(x)d_1(b)=0$. 再由引理 1 之(1)即知 $d_1=0$.

如果 $d_2R\not\subset J_r$，可在(1)式中用 $ad_2(c)$ 代 a，亦可有(3)式，再用(1)—(3)可得 $d_1(c)d_2(b)=0$. 由引理 1 也有 $d_1=0$.

类似地，当 $d_1R\not\subset J_r\cap J_l$ 时，就有 $d_2=0$.

显然，如果在 dR 中有非零因子，就有 $dR\not\subset J_r\cap J_l$. 我们还可对此条件作如下讨论.

命题 1 设 R 如引理 1，d 为 R 上导子，且 $dJ\neq 0$，如果 $dR\subset J_r\cap J_l$，则有 $dJ=J$.

证明 由已知条件易见 $RJ=JR=J$. 且 $dJ=d(JR)=dJR$. $dJ=d(RJ)=RdJ$. 于是 dJ 为 R 之非零理想. 故 $dJ\supseteqq J$.

再由 $dJ\supseteqq J$ 知任取 $0\neq a\in J$ 有 $b\in J$ 使 $b'=a$. 于是 $0\neq RbR\supseteqq J$. 从而存在 $x_i, y_i\in R$，使 $\sum x_iby_i=a$. 这就有

$$a'=(\sum x_iby_i)'=\sum(x'_iby_i+x_ib'y_i+x_iby'_i)=\sum x_ib'y_i=\sum x_iay_i\in J$$

显然 $0'=0\in J$. 故 $dJ\subseteqq J$.

综合上述便知 $dJ=J$.

例 1. 设 R 为特征数为 0 的域上代数，其基底为 e, z_1, z_2，乘法表如右.

由于 R 中任意非零元素 a 均有 $(a)\supset(z_2)$，且 e 不为零因子，故 R 为定理 1 中要求之亚直不可约环.

	e	z_1	z_2
e	e	z_1	z_2
z_1	z_1	z_1	z_2
z_2	z_2	0	0

在 R 上定义

$d_1(\alpha e+\beta_1z_1+\beta_2z_2)=\beta_1z_2$;

$d_2(\alpha e+\beta_1z_1+\beta_2z_2)=(\beta_1+\beta_2)z_2$

容易验证 d_1, d_2 均为 R 上非零导子. 且 $d_1d_2=0$，$d_2d_1=d_1$ 均仍为 R 上导子.

这个例子说明了在定理 1 中条件 $dR\not\subset J_r\cap J_l$ 是必要的. 事实上，这里 $d_1J=0$，$d_2J=J$. $d_1R\subset J_r\cap J_l$，$d_2R\subset J_r\cap J_l$. 同时，也说明了引理 1 之(2)中 $d\,U\not\subset J_r\cap J_l$. 这一条件的必要性. 此处 $d_1J=0$，但 $d_1R\neq 0$.

推论 1 设 R 如定理 1，如果 d^2 仍为 k 的导子，必有 $dJ=J$ 或 $dJ=0$.

引理 2 设 R 如引理 1，U 为 R 的非零理想，且 $U_l=U_r=0$，d 为 R 上的导子. 若 $d\,U\subset J_r$($d\,U\subset J_l$)，则 $dR\subset J_r$($dR\subset J_l$).

证明 $d\,U\supset d(RU)=dRU+Rd\,U$，若 $Jd\,U=0$ 则

$$JdRU+JRdU\subset JdU=0, JRdU\subset JdU=0.$$

由 $U_l=0$ 知 $JdR=0$.

引理 3 设 R 及 U 如引理 2，如果 U 为交换的，则 R 为交换的.

证明 由已知，对任意 $u\in U$，有 $I_u(U)=[u,v]=0$. 由引理 1 之(2)知 $I_u(R)=0$. 于是对任

意 $r\in R$，有 $I_r(U)=0$. 再由引理 1 之(2)就有 $I_r(R)=0, r\in C, R$ 为交换的.

定理 2 设 R 及 U 如引理 2，d 为 R 上导子，且满足 $dR\not\subset J_r\cap J_l$. 如果对所有 $u\in U$ 有 $[u',u]=0$，则 R 必为交换环.

证明 对 $[u',u]=0$ 线性化可得 $[u',v]=[u,v']$. 在上式中以 $u\,v$ 代 v 有

$$[u',uv]=[u,(uv)']=[u,u'v+uv'].$$

$$[u,uv']=u[u,v']=u[u',v]=uu'v-uvu'=u'vu'-uvu'=[u',uv]=u'[u,v]+[u,uv'].$$

比较上式两端就有

$$u'[u,v]=0. \tag{4}$$

用 vu 代替 v，类似地可有 $[u,v]u'=0$.

下面证明 U 为可换的. 如果 U 不可换，则存在 $u_1,u_2\in U$，使 $[u_1,u_2]\neq 0$. 对于 $u\notin C_R(U)$，则有 $w\in U$ 存在，使 $[u,w]\neq 0$ 在(4)式中把 v 换成 vw 得

$$0=u'[u,vw]=u'v[u,w]+u'[u,v]w=u'v[u,w],$$

于是 $0=u'U[u,w]U\supset u'J$. 即 $u'\in J_l$.

由 $[u,v]u'=0$，又知 $u'\in J_l$. 即若 $u\notin C_R(U)$，则 $u'\in J_l\cap J_r$.

对于 $u\in C_R(U)$，在(4)中把 u 换成 $u+s, s\in U$ 得

$$(u+s)'[(u+s),v]=0.$$

于是

$$s'[u,v]+u'[s,v]=u'[s,v]=0.$$

特别有 $u'[u_1,u_2]=0$，由 $u\in C_R(U)$ 知 $I_u(U)=0$. 由引理 1 之(2)知 $u\in C$ 从而 $u'\in C$. 于是

$$u'U[u_1,u_2]U=u'J=0=Ju'.$$

即 $u'\in J_r\cap J_l$

综合上述可知，若 U 不可换就有 $dU\subset J_r\cap J_l$. 由引理 2 可知 $dR\subset J_r\cap J_l$，此为矛盾. 于是 U 可换. 再由引理 3 就得到 R 的交换性.

设 R 如定理 1，d 如定理 2. 有

定理 3 如果对于 $a\in R$，使对所有 $u\in R$，有 $[a,u']=0$，则必有 $a\in C$.

证明 由定理条件知 $I_a dR=0$，由定理 1 可知，对所有 $x\in R$ 有 $[a,x]=0$. 故 $a\in C$.

设 R,U 及 d 如上，我们有

定理 4 如果对一切 $u\in U, v\in R, [u',v']=0$，则 R 是可换的.

证明 由 $I_{u'}dR=0$，再由定理 1 即知 $I_{u'}=0$，即 $u'\in C$. 于是

$$(uv)'=u'v+uv'\in C$$

$$0=[u,u'v+uv']=u'[u,v]=[u,v]u'.$$

由定理 2 之证，就得到 R 的交换性.

仍设 R、U 及 d 如上，又有

定理 5 如果 $d^2R=0$，则 R 是可换的.

证明 由 $[u,v]''=[u'',v]+2[u',v']+[u,v'']=0$，于是 $[u',v']=0$，由定理 4 便知 R 为可换的.

二

在这一段中，我们仍然假定 $dR\not\subset J_r\cap J_l$. 并对 $J_r\cap J_l$ 再假定 $J_r\cap J_l\subseteq K=\{x\mid x'=0\}$，而将定理 2 中之条件减弱. 由于与前一段同样的原因，对于有幂等心的亚直不可约环是自然满足所附

加条件的.

设 R 如定理 2 且为 2—扭自由的,U 及 d 如定理 2,我们有

定理 2' 如果对所有 $u\in U$ 有$[u',u]\in C_R(U)$且 $J_r\cap J_l\subseteq K=\{x|x'=0\}$,则 R 为交换的.

证明 对$[u',u]\in C_R(U)$线性化可得

$$[u',v]+[v',u]\in C_R(U),$$

在上式中用 u^2 代 v 得

$$[u',u^2]+[(u^2)',u]=4u[u',u]\in C_R(U).$$

于是知 $u[u',v]\in C_R(U)$,从而对任意 $w\in U$ 有

$$0=[u[u',u],w]=[u'u][u,w] \tag{5}$$

如果对所有 $u\in U$ 有$[u'u]=0$,由定理 2 知 R 为交换的.

如果有 $u\in U$ 使$[u',u]\neq 0$,由(5)式就有$[u,w]\in J_r\cap J_l$ 由定理条件知

$$[u,uv]'=(u[u,v])'=u'[u,v]=0.$$

同样的$[u,v]u'=0$. 由定理 2 后半段之证便知 R 为交换的.

参 考 文 献

[1] E. C. Posner, *derivation in prime rings*, Proc Amer Math Soc, 8(1957), 1093—1100.

[2] I. N. Herstein, *Anote on derivation*, Canad Math Bull, 21 (1978), 369—370.

[3] I. N. Herstein, *Anote on derivation* Ⅱ, Cannd Math Bull, 22 (1979), 509—511.

[4] P. H. Lee and T. K. Lee, *Lie ideals of prime rings with derivation*, Bull Inst Math Acad Sinica, 11 (1983), 75—80.

[5] N. H. McCoy, *Subdirectly irreducible commutative rings*, Duke Math J, 12 (1945), 381—387.

Derivation in Subdivectly Irreducible Rings

Fu Changlin
(Harbin Univesity of Science and Technology)

Yuan Yongjiu
(Jilin University)

Abstract

Let R be a subdirectly irreducible ring, U be a nonzero ideal of R, J be a unique minimal ideal of R, $R_l, R_r, U_l, U_r, J_l, J_r$, respectively the left annihilator and right annihilator of R, U, J.

In this paper,we shall proue that if $R_l=R_r=U_l=U_r=0$. Let R be 2-torsion free, and d_1, d_2 be derivations of R such that iterate d_1d_2 is also a derivation. If $d_2R\not\subset J_r\cap J_l$ then $d_1=0$, $if d_1R\not\subset J_r\cap J_l$,then $d_2=0$.