第12卷第2期
1992年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 12 No. 2
May 1992

关于小投射模*

刘永辉
(枣庄师范专科学校数学系,山东 277160)

摘 要

本文利用小投射模刻划了左 V—环并研究了补小投射模的性质,给出其自同态的构造,推广了[1]的主要定理 1.15.

§1 左 V—环的刻划

在本文中,R 表示有 1 的结合环,所有模均指酉左模. 对任意的左 $R-$ 模 M 来说,$J(M)$ 表示 M 的 Jacobson 根基.

设 A,B 是 M 的子模,满足 $M=A+B,B'\leqslant B$,称 B' 是 A 在 B 中的补,如果 $M=A+B'$,并且对任意的 $B''\not\leqslant B'$,都有 $M\neq A+B''$. 称 M 的子模 K 是 M 的小子模,记成 $K<<M$,如果由 $K+N=M$ 可以推出 $N=M$,这里 N 是 M 的任意子模. 如果 M 的每一个子模都在 M 中有补,则称 M 是补模. 如果 M 的每一个真子模 M 都是的小子模,则称 M 是空心模.

称模 M 是小投射模,如果对于任何的满同态 $\alpha:B\to A$,$\mathrm{Ker}\alpha<<B$,都有 $\mathrm{Hom}_R(M,A)=\alpha\cdot\mathrm{Hom}_R(M,B)$. 称模 M 是补小投射模,如果 M 既是补的,又是小投射的.

称环 R 是左 $V-$ 环,如果每一个单左 $R-$ 模是内射模. 称环 R 是 Von Neumann 正则环,如果对任意的 $a\in R$,存在 $t\in R$,使得 $a=ata$.

引理 1(Michler — Villamayor[2]) 对环 R 来说,下列陈述是等价的

<1> R 是左 V — 环.

<2> R 的每一个左理想都是包含该左理想的极大左理想的交.

<3> 对任意的左 $R-$ 模 M,$J(M)=0$.

引理 2 若 $M=A\oplus B,A<<M$,则 $A=0$.

引理 3 若环 R 上的所有左 $R-$ 模都是小投射的,则对任意的左 $R-$ 模 M 来说,必有 $J(M)=0$.

证明 任取 M 的小子模 $K,K<<M$. 考察右面的图

$$\begin{tikzcd} & M/K \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "1"] & \\ M \arrow[r, "\mu"'] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由于 M/K 是小投射的,故存在同态 f,使得 $\gamma f=1$. 从而有 $M=\mathrm{Ker}\gamma\oplus\mathrm{Im}f=K\oplus\mathrm{Im}f$. 由引理 2 知,$K=0$. 这说明 M 中没有非 0 的小子模,从而 $J(M)=0$.

定理 4 下列陈述是等价的

* 1990年3月8日收到.

＜1＞　R 是左 $V-$ 环；　＜2＞　每一个左 $R-$ 模都是小投射的.

证明　＜1＞⇒＜2＞　任取左 $R-$ 模 M、A、B. 任给正合列 $B\xrightarrow{g}A\rightarrow 0$，$\mathrm{Ker}g<<B$. 由于 R 是左 $V-$ 环，由引理 1 知，$J(B)=0$，从而 $\mathrm{Ker}g=0$，g 是同构. 任给 $f:M\rightarrow A$ 作　$\bar{f}:M\rightarrow B$，　$x\rightarrow g^{-1}f(x)$，则必有 $f=g\bar{f}$，从而 M 是小投射的.

＜2＞⇒＜1＞　由引理 3 知，每一个左 $R-$ 模 M 都有 $J(M)=0$，由引理 1 知，R 是左 $V-$ 环.

§2　补　　模

引理 5(Miyashita[3])　若 $M=A+B$，则 B 是 A 在 M 中的补 ⇔ $A\cap B<<B$.

定理 6　若 M 是补模，则 $M/J(M)$ 是半单模.

证明　只须证明 $\overline{M}=M/J(M)$ 的每一个子模都是 $\overline{M}$ 的直和项.

事实上，设 $\overline{A}=A/J(M)$ 是 $\overline{M}$ 的任一子模. 由于 M 是补模，故对 A 来说存在 B，使得 $M=A+B$，B 是 A 的补，由引理 5 知，$A\cap B<<B$，当然 $A\cap B<<M$. 显然 $\overline{M}=\overline{A}+\overline{B}$. 任取 $\overline{m}\in\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $\overline{m}=a+J(M)=b+J(M)$，其中 $a\in A$，$b\in B$，从而 $a-b=r\in J(M)$，这样 $b=a-r\in A\cap B\leqslant J(M)$，由 $b\in J(M)$ 知，$\overline{m}=\overline{0}$，亦即有 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{0}$，从而 $\overline{M}=\overline{A}\oplus\overline{B}$. 因此，$M/J(M)$ 是半单模.

推论 7　下列条件是等价的

＜1＞　M 是半单模；　＜2＞　M 是补模且 $J(M)=0$.

推论 8　若 R 是 $V-$ 环，则 R 上任意的补模必是半单模.

推论 9　若 R 是半本原环，如果 ${}_RR$ 是补模，则 R 必是完全约化的.

§3　补 小 投 射 模

引理 10(Miyashita[3])　补模的同态象仍是补模.

引理 11(A. K. Tiwary[1])　小投射的直和项亦是小投射模.

引理 12(A. K. Tiwary[1])　若 $M=A+B$ 是小投射模，A 和 B 互为补，则必有 $M=A\oplus B$.

若 $M=A+B$，B 是 A 在 M 中的补，则称 B 是 M 的补子模.

定理 13　若 M 是补小投射模，那么 M 的子模 A 是补子模 ⇔ A 是 M 的直和项.

证明　充分性是显然的，下证必要性.

由于 A 是 M 的补子模，可设 A 是 N 的补 $M=A+N$. 由于 M 是补模，从而 A 也有补，设 A 的补是 B，$M=A+B$. 我们说 A 也是 B 的补. 事实上，若有 $M=A'+B$，$A'\leqslant A$，必有 $A=A'+(A\cap B)$，从而 $M=A'+(A\cap B)+N$. 由于 $A\cap B<<B$，当然 $A\cap B<<M$，从而 $M=A'+N$，但 A 是 N 的补，必有 $A=A'$. 这说明 A 和 B 互补，由引理 2 知，$M=A\oplus B$，亦即 A 是 M 的直和项.

推论 14　若 M 是补小投射模，则 M 的补子模亦然.

证明　由引理 10，引理 11 和定理 13 得到.

定理 15　对补小投射模 M 来说，下列陈述是等价的.

＜1＞　M 是不可分解的；　＜2＞　M 是空心模.

证明 $<1>\Rightarrow<2>$ 任取 M 的真子模 A,由于 M 是补模,故有 $M=A+B$,B 是 A 的补.由定理 13 知 B 是 M 的直和项,但 M 不可分解,$B\neq 0$,从而 $B=M$,这说明 A 的补只能是 M,亦即 $A<<M$.从而是空心模.

$<2>\Rightarrow<1>$ 若 M 是空心模,由[1]的定理 1.14 可知,$\mathrm{End}(M)$ 是局部环,从而 M 不可分解.

定理 16 设 M 是补小投射模,$S=\mathrm{End}(M)$,则有 $<1>$ $J(S)=\{a\in S\mid \mathrm{Im}a<<M\}$;
$<2>$ $S/J(S)$ 是 Von Neumann 正则环;$<3>$ 若 $J(M)<<M$,则 $J(S)=\mathrm{Hom}_R(M,J(M))$.

证明 令 $\Delta=\{a\in S\mid \mathrm{Im}a<<M\}$. $<1>$ $\Delta\leqslant J(S)$

任取 $a\in\Delta$,则 $\mathrm{Im}a<<M$,由于 $M=aM+(1-a)M$,从而 $M=(1-a)M$,亦即 $1-a$ 是 M 的满同态.欲证 $a\in J(S)$,只要证 $\mathrm{Ker}(1-a)=0$.

令 $K=\mathrm{Ker}(1-a)\leqslant M$,由于 M 是补模,可设 $M=K+L$,L 是 K 的补.由定理 13 知,L 是 M 的直和项.作 $\gamma:M\to M/K$ 是同态,限制在 L 上有 γ': $L\to M/K$,$\mathrm{Ker}\gamma'=L\cap K$,由于 L 是 K 的补,$\mathrm{Ker}\gamma'<<L$.由于 $1-a$ 是满同态,从而 $M/K\cong M$,因此 M/K 亦是小投射模,考察右图必存在 $h:M/K\to L$,使得 $\gamma'h=1$,从而

$$
\begin{tikzcd}
 & M/K \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1"] & \\
L \arrow[r, "\mu'"'] & M/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$L=\mathrm{Im}h\oplus\mathrm{Ker}\gamma'=\mathrm{Im}h\oplus(K\cap L).$$

由于 $K\cap L<<L$,从而 $K\cap L=0$,$M=K\oplus L$.这样,$(1-a)M=(1-a)K+(1-a)L=(1-a)L=M$,因此,$L+a(L)=M$,由于 $\mathrm{Im}a<<M$,从而有 $L=M$.从而 $K=0$.这就证明 $\Delta\leqslant J(S)$.

$<2>$ $S/J(S)$ 是 Von neumann 正则环.

任取 $a\in S$,对 $\mathrm{Im}a$ 来说,由于 M 是补模,故 $M=\mathrm{Im}a+U$,其中 U 是 $\mathrm{Im}a$ 的补,由于 $\mathrm{Im}a\cap U<<U$,当然 $\mathrm{Im}a\cap U<<M$.

作映射 $\varphi:M/U\to M/a^{-1}(U)$

$$a(m)+U\to m+a^{-1}(U).$$

φ 是映射.因为 $a(m)+U=a(n)+U$,则有 $a(m-n)\in U$,从而 $m-n\in a_{-1}(U)$,亦即 $m+a^{-1}(U)=n+a^{-1}(U)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[d, "\mu_U"] & \\
 & M/U \arrow[d, "\varphi"] & \\
K \arrow[r, "\mu"'] & M/\delta(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

考察 $a^{-1}(U)\leqslant M$,存在 K,$M=a^{-1}(U)+K$,其中 K 是 $a^{-1}(U)$ 的补.作 $\gamma:M\to M/a^{-1}(U)$ 是自然同态,限制在 K 上有 $\gamma':K\to M/a^{-1}(U)$,$\mathrm{Ker}\gamma'=K\cap a^{-1}(U)<<K$ 由于 M 是小投射模,考察右图存在 $t:M\to K$,使得 $\gamma't=\varphi\gamma_u$,这样

$$\gamma't(a(m))=\varphi\gamma_U(a(m))=\varphi(a(m)+U)=m+a^{-1}(U),$$

也即 $ta(m)+a^{-1}(U)=m+a^{-1}(U)$. 故存在 $r\in a^{-1}(U)$,使得 $ta(m)=m+r$,从而 $ata(m)=a(m)+a(r)\Rightarrow(a-ata)(m)=-a(r)\in U\cap\mathrm{Im}a<<M\Rightarrow a-ata=a(1-ta)\in\Delta\leqslant J(S)\Rightarrow S/J(S)$ 是 Von Neumann 正则环.

$<3>$ $J(S)\leqslant\Delta$

任取 $a\in J(S)$,由 $<2>$ 的讨论可知,存在 $t\in S$,使得 $a(1-ta)\in\Delta$,但由于 $a\in J(S)$,故 $1-ta$ 可逆,从而 $a(1-ta)(1-ta)^{-1}=a\in\Delta$,这说明 $J(S)\leqslant\Delta$.

$<4>$ 若 $J(M)<<M$,则 $J(S)=\mathrm{Hom}_R(M,J(M))$.

由于 $J(M) << M$,考察右图任取 $\bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}_R(M/J(M),$ $M/J(M))$,由于 M 是小投射的,从而存在 $\alpha \in S$,使上图可交换.这样作

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & M/J(M) \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/J(M) \end{tikzcd}$$

$$f: S \to \mathrm{Hom}_R(M/J(M), M/J(M))$$
$$\alpha \to \bar{\alpha}$$

则 f 是满同态,并且 $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Hom}_R(M, J(M))$,由于 $J(M) << M$,任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}f$,则 $\mathrm{Im}\alpha \leqslant J(M)$,当然 $\mathrm{Im}\alpha << M$,由 $< 1 >$ 知,$\alpha \in J(S)$.同理可征 $J(S) \leqslant \mathrm{Ker}f$,从而 $J(S) = \mathrm{Hom}_R(M, J(M))$.

称模带有 f.s.d,如果对 M 的任一子模降链 $M \geqslant M_0 \geqslant M_1 \geqslant M_2 \geqslant \cdots$ 来说,存在 n,使得对一切 $m \geqslant n$,$M_m << M$.

根据[1]的定理 1.13,小投射带有 f.s.d$\Leftrightarrow M$ 是空心模或者 M 是 Artin 模.以及带 f.s.d 的模必是补模这一事实,我们得到

推论 17 若 M 是空心小投射模或者 M 是 Artin 小投射模,$S = \mathrm{End}(M)$,则有

$< 1 >$ $J(S) = \{\alpha \in S | \mathrm{Im}\alpha << M\}$;$< 2 >$ $S/J(S)$ 是 Von Neumann 正则环;

$< 3 >$ 若 $J(M) << M$,则 $J(S) = \mathrm{Hom}_R(M, J(M))$.

在[1]中,A. K. Tiwaryt 和 K. N. Chauey 证明的主要结果.

定理 A 设 M 是空心小投射模,$S = \mathrm{End}(M)$ 则有

$< 1 >$ $J(S) = \{\alpha \in S | \mathrm{Im}\alpha << M\}$;$< 2 >$ $S/J(S)$ 是 Von Neumann 正则环;

$< 3 >$ $J(M) << M \Leftrightarrow J(S) \Leftrightarrow J(S) = \mathrm{Hom}_R$ 正则环.

容易看出,推论 17 是定理 A 的推广.

参 考 文 献

[1] A. K. Tiwary and K. N. Chaubey, *Small projective modules*, Indian. J. Pure. Appl. Math 16(2)(1985), 133—138.

[2] G. O. Michler and O. E. Villamayor, *On rings whose simple modules are injective*, J. Algebra 25(1973), 185—201.

[3] Y. Miyashita, *Quasi—projective modules, perfect modules, and a theorem for modular lattices*, J. F. Sci. Hokkaido. Univ(1)19(1966), 86—110.

[4] J. S. Golan, *Quasi perfect modules*, Quart. J. Math. Oxford(2)22(1971), 173—182.

On Small Projective Modules

Lin Yonghui

(Qufu Normal University, Shandong)

Abstract

We characterize the left V-ing via the technique of small projectine modnle. We also give some properties of small projective modules and give the structure of their automorphism ring, this result generalizes the main result in [1].