第12卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 2
1992年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1992

关于正规Fitting对*

郭 文 彬
(扬州师范学院数学系,225002)

本文利用给出 X－正规 Fiting 对[1]的积,解决了两个 X－正规 Fitting 类[1]的交所对应的 X－正规 Fitting 对与原两个 X－正规 Fitting 类所对应的两个 X－正规 Fitting 对之间的关系,同时给出了正规 Fitting 对的一个扩张定理以及 Fitting 对的积扩张的一个性质.

定理 1.1　设(f_1,A_1),(f_2,A_2)是两个 X－正规 Fitting 对,则我们可以构造一个新的 X－正规 Fitting 对(f,A),其中 $A=\{(f_{1G}(g),f_{2G}(g))\mid g\in G,G\in X\}$,$A$ 的运算为对应分量相乘,且满足 $f_G(G)$到 A_i 的投射是 f_{iG},$i=1,2$. 称此(f,A)为(f_1,A_1)与(f_2,A_2)的积,记为$(f_1\times f_2,A_1\overline{\times} A_2)$.

定义 1.1　设(f,A)为一个 X－正规 Fitting 对,Y 为一个 X－正规 Fitting 类. 如果 $Y=Y(f,A)=\{G\in X\mid G=\mathrm{Ker}f_G\}$,则称 Y 享有 X－正规 Fitting(f,A),并称 Y 是(f,A)的主 Fitting 类.

定理 1.2　设(f_1,A_1),(f_2,A_2)是两个 X－正规 Fitting 对,则它们的积$(f_1\times f_2,A_2\times A_2)$的主 Fitting 类是$(f_1,A_1)$的主 Fitting 类与$(f_2,A_2)$的主 Fitting 类的交.

推论 1.3　两个非平凡 X－正规 Fitting 类的交所享有的 X－正规 Fitting 对是原来两个 X－正规 Fitting 类所享有的 X－正规 Fitting 对的积.

推论 1.4　$G_{Y(f_1\times f_2,A_1\times A_2)}=G_{Y(f_1\times A_1)}\cap G_{Y(f_1\times f_2)}$.

定理 1.5　设(f_1,A_1),(f_2,A_2),(f'_1,A'_1),(f'_2,A'_2)都是 X－正规 Fitting 对,且$(f_1,A_1)\subsetneqq(f'_1,A'_1)$,$(f_2,A_2)\subsetneqq(f'_2,A'_2)$,则$(f_1\times f_2,A_1\overline{\times} A_2)\subsetneqq(f'_1\times f'_2,A'_1\overline{\times} A'_2)$.

引理 2.1　设 G 是有限群,H_π 为 G 的 Hall π－子群,则 $H_\pi\cap G'=<x^{-1}x^y\mid x\in H\pi,y\in G,x^y\in H_\pi>$.

引理 2.2　设 X,Y 是两个 Fittong 类. 如果 $\mathrm{char}X\cap\mathrm{char}Y=\Phi$,则 $X\vee Y=\{G\mid G=GXGY\}$.

定理 2.3　设 X,Y 是 Fitting 类,$\mathrm{char}X\cap\mathrm{char}Y=\Phi$. 如果$(f,A)$是一个 X－正规 Fittong 对,$|A|$ 的素因数 $\mathrm{char}X$,则存在$(X\vee Y)$－正规 Fittong 对$(\bar f,A)$作为(f,A)的扩张.

证明　i)　定义$(\bar f,A)$. 任取 $G\in X\vee Y$,作

$$\bar f_G:G\to A$$
$$y\longrightarrow f_{GX}(V_{G\to GX}(y)),$$

其中 $V_{G\to GX}$ 是 G 到 $GX/G'X$ 的传输. 因为 f_{GX} 映射 GX 交换到群 A,所以 $G'X\subseteq\mathrm{Ker}f_{GX}$. 因此 f_GX 定义了唯一的 $GX/G'X$ 到 A 的同态,从而 $f_GX(V_{G\to GX}(y))$定义了一个 G 到 A 的同态.

ii)　设 $N\trianglelefteq G\in X\vee Y$,来证明 $\bar f_G|_N=\bar f_N$. 任取 $y\in N$,$\bar f_N(y)=f_{NX}(V_{N\to NX}(y))$,$\bar f_G(y)=f_{GX}(V_{G\to GX}(y))$. 由传输理论易知 $V_{G\to GX}(y)=y^mvG'X$,其中 $m=[G:GX]$,$v\in G'$. 令 $\pi=\mathrm{char}X$,则 A 为 π－群,N 中 π'－元在 $\bar f_G$ 和 $\bar f_N$ 下的象都是 1. 因而不妨设 y 为 N 中的 π－元,从而同态像 $y^mvG'X$ 也是 π－元。但 $G'\trianglelefteq GX$,所以 $G'X$ 也是 π－群,从而 y^mv 为 π－元. 这推出 v 也为 π－元. 从而 $v\in GX\cap G'$. 由于 $\mathrm{char}X\cap\mathrm{char}Y=\varphi$,据引理 2.2,$X\vee Y=\{G\mid G=GXGY\}$,可见 GX 是 G

* 1990年4月30日收到.

的 Hall π－子群. 再据引理 2.1，有 $GX\cap G'=\langle X^{-1}x^y \mid x\in GX, y\in G, x^y\in G\rangle$. 但由于 GX 到 $G^yX(=GX)$ 有一自然的单一同态 $\alpha: x\to x^y$，据 Fittong 对的定义易知 $f_GX(x)=f_{G^y X}(x^y)=f_GX(x^y)$，所以 $f_{GX}(x^{-1}x^y)=1$. 因此 $f_{GX}(v)=1$，从而 $\bar{f}_G(y)=f_{GX}(V_{G\to GX}(y))=f_{GX}(y^m vG'X)=f_{G_X}(y^m v)=(f_{G_X}(y))^m$. 类似地有 $\bar{f}_N(y)=(f_{NX}(y))^m$. 但 NX char$N\trianglelefteq G$，所以 $NX\trianglelefteq G$，从而 $NX\trianglelefteq GX$. 由 Fittong 对的定义. 有 $f_{GX}(y)=f_{NX}(y)$，所以 $\bar{f}_G(y)=(f_{GX}(m))^m=(f_{NX}(y))^m=\bar{f}_N(y)$.

iii) 如果 $G\in X$，则 $\bar{f}_G=f_G$，从而也有 $A=\{\bar{f}_G(g)\mid g\in G, G\in X\vee Y\}$. 事实上，此时 $GX=G$，那么任取 $y\in G$，$\bar{f}_G(y)=f_G(V_{G\to G}(y))=f_G(yG')=f_G(y)$. 综上定理得证.

定理 2.4 设两个 X－正规 Fittong 对 (f_1, A_1)，(f_2, A_2) 分别为两个 Y－正规 Fittong 对 (g_1, B_1)，(g_2, B_2) 的扩张，则 $(f_1\times f_2, A_1\boxtimes A_2)$ 是 $(g_\times g_2, B_1\boxtimes B_2)$ 的扩张.

参 考 文 献

[1]H. Lausch. ,*On normal Fitting Classes*, Math. Z. 130,1973,67—72.