第12卷第1期 数学研究与评论 Vol. 12 No. 2
1992年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1992

关于Jackson算子的最佳逼近常数*

王 冠 闽
(漳州师范学院数学系，福建 363000)

摘 要

本文求出用Jackson算子$J_n(f;x)$逼近$C_{2\pi}$中的函数$f(x)$时的准确逼近常数：对$\forall\ n\geqslant1$，有

$$|J_n(f;x)-f(x)|\leqslant(4-\frac{6}{\pi})\omega(f;\frac{1}{n})$$

及用阶数不超过n的三角多项式对函数$f(x)$的最佳逼近常数的上界估计：$\forall\ n\leqslant1$，有

$$E_n(f)_c\leqslant(7-\frac{21}{2\pi})\omega(f;\frac{1}{n})$$

§1

设$C_{2\pi}$是周期为2π的连续函数的全体，$\omega(f;\delta)$表示函数$f(x)$的连续模，$E_n(f)_c$表示阶数不超过n的三角多项式对连续函数$f(x)$的最佳逼近. 文[2]证明：

$$\max_x|J_n^*(f;x)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}\omega(f;\frac{\pi}{n+1}).$$

最近文[6]证明了：

$$|J_n(f;x)-f(x)|\leqslant3.096725115\omega(f;\frac{1}{n})\quad(n\geqslant50).$$

Amer. math. Reviews[8]有：

$$|J_n(f;x)-f(x)|\leqslant3.3216938\omega(f;\frac{1}{n})\quad(n\geqslant8),$$

$$E_n(f)_c\leqslant6.6433876\omega(f;\frac{1}{n})\quad(n\geqslant8).$$

文[7]也证明了：

$$|J_n(f;x)-f(x)|<2.164315\omega(f;\frac{1}{n})\quad(n\geqslant4),$$

$$E_n(f)_c<4.328630\omega(f;\frac{1}{n})\quad(n\geqslant8)$$

关于$E_n(f)_c$的上界，H. Корнейчук[1]早已证明了：

* 1991年1月9日收到.

$$E_n(f)_c \leqslant \omega(f;\frac{\pi}{n}) \leqslant 4\omega(f;\frac{1}{n}).$$

文[1][2]的结果是关于 $\omega(f;\frac{\pi}{n})$的准确逼近常数，而 Jackson 原来是要求出关于 $\omega(f;\frac{1}{n})$的逼近常数，两者还是有差别的. 而文[6][7][8]的逼近常数是不准确的. 本文得出用 Jackson 算子逼近 $C_{2\pi}$ 中的 $f(x)$时关于 $\omega(f;\frac{1}{n})$的准确逼近常数(定理 1). 文[1]中 $E_n(f)_c$关于 $\omega(f;\frac{1}{n})$的逼近常数 4 还不是准确的，本文将把此常数改小，得出 $E_n(f)_c$关于 $\omega(f;\frac{1}{n})$的新逼近常数(定理 2).

定理 1　设 $f(x)\in C_{2\pi}, n\in N$(自然数集)；记 Jackson 算子为：

$$J_n(f;x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^4 dt, \tag{1}$$

则成立着不等式：对$\forall\ n\geqslant 1$

$$\max_x |J_n(f;x)-f(x)| \leqslant (4-\frac{6}{\pi})\omega(f;\frac{1}{n}) \doteq 2.090140683\omega(f;\frac{1}{n}), \tag{2}$$

等号仅当 $f(x)\equiv\text{const}$ 时成立，其中常数$(4-\frac{6}{\pi})$是准确的：

$$\sup_{n\in N}\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\not\equiv\text{const}}} \frac{\max\limits_x |J_n(f;x)-f(x)|}{\omega(f;\frac{1}{n})} = 4-\frac{6}{\pi}. \tag{3}$$

定理 2　设 $f(x)\in C_{2\pi}, n\in N$，则成立着不等式：

$$E_n(f)_c \leqslant (7-\frac{21}{2\pi})\omega(f;\frac{1}{n}) \doteq 3.657746195\omega(f,\frac{1}{n}). \tag{4}$$

等号仅当 $f(x)\equiv\text{const}$ 时成立.

§2　定理 1 的证明

设 $f(x)\in C_{2\pi}, f(x)\equiv\text{const}$，对 $n\in N$，

$$\begin{aligned}|J_n(f;x)-f(x)| &= \left|\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\right| \\ &\leqslant \frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\omega(f;2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &\leqslant \frac{6\omega(f;\frac{1}{n})}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([1+[2nt])\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &= \left\{1+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([2nt])\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\right\}\omega(f;\frac{1}{n}),\end{aligned} \tag{5}$$

其中$[x]$表示不超过 x 的整数部分. 记

$$C_n = \sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\not\equiv \text{const}}} \frac{\max_x |J_n(f;x) - f(x)|}{\omega(f;\frac{1}{n})} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{6}$$

则

$$C_n \leqslant 1 + \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([2nt])\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

对于 $n=1,2,\cdots$，和正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{\alpha_n}{n}<\frac{1}{n}, 0<\alpha_n=n\pi-[n\pi]<1)$ 设置周期为 2π 的偶函数 $f_{n,\varepsilon}(x)$，它在区间 $[0,\pi]$ 这样定义：

$$f_{n,\varepsilon}(x) = \begin{cases} k+\frac{1}{\varepsilon}(x-\frac{k}{n}); & x\in[\frac{k}{n},\frac{k}{n}+\varepsilon], k=0,1,\cdots,[n\pi], \\ k+1, & x\in[\frac{k}{n}+\varepsilon,\frac{k+1}{n}]; k=0,1,\cdots,[n\pi]-1 \\ [n\pi]+1, & x\in[\frac{[n\pi]}{n}+\varepsilon,\pi] \end{cases} \tag{7*}$$

于是：$\omega(f_{n,\varepsilon};\frac{1}{n})=1$，且有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[J_n(f_{n,\varepsilon};0) - f_{n,\varepsilon}(0)] = 1 + \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([2nt])\left(\frac{\sin nt^4}{\sin t}\right)dt,$$

所以

$$C_n = 1 + \frac{6}{\pi n(2n^2+1})\int_0^{\frac{\pi}{2}}([2nt])\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{7}$$

我们有等式[2]：

$$(\frac{\sin nt}{\sin t})^4 = \frac{1}{3}\left\{n(2n^2+1) + \sum_{k=1}^{2n-2}\rho_k^{(n)}\text{con}3kt\right\} \tag{8}$$

其中：

$$\rho_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!} - 4\frac{(n-k+1)!}{(n-k-2)!}, (1\leqslant k\leqslant n-2) \\ \frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!}; & (n-1\leqslant k\leqslant 2n-2). \end{cases}$$

$$C_n = 1 + \frac{2}{\pi n(2n^2+1)}\left(\sum_{V=1}^{[n\pi]-1} V\int_{\frac{V}{2n}}^{\frac{V+1}{2n}} + [n\pi]\int_{\frac{[n\pi]}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left\{n(2n^2+1) + \sum_{k=1}^{2n-2}\rho^{(n)}\cos 2kt\right\}dt,$$

$$C_n = 1 + [n\pi]\left(1 - \frac{[n\pi]+1}{2n\pi}\right) - \frac{1}{\pi n(2n^2+1)}\left\{\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{\rho_k^{(n)}\sin\frac{([n\pi]+1)k}{2n}\cdot\sin\frac{[n\pi]k}{2n}}{k\sin\frac{k}{2n}}\right\}. \tag{9}$$

现证明：对 $\forall\ n\geqslant 1$，C_n 常不超过 $C_1=4-\frac{6}{\pi}$.

当 $n\geqslant 6$ 时；$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$(\frac{x}{\sin x})(>1)$ 是单调增加函数，

$$C_n < 1 + \frac{3}{\pi n^3}\left(\int_0^{\frac{6}{2n}} + \int_{\frac{6}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\right)[2nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = 1 + I_1 + I_2$$

$$I_1=\frac{3}{\pi n^3}\int_0^{\frac{6}{2n}}[2nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{6}{2}}[2u]\left|\frac{\frac{u}{n}}{\sin\frac{u}{n}}\right|^4\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4du<\frac{3}{\pi}\sum_{V=1}^{5}\left|\frac{\frac{V+1}{2n}}{\sin\frac{V+1}{2n}}\right|^4V\int_{\frac{V}{2}}^{\frac{V+1}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt. \tag{10}$$

进行分部积分[2]，可算出

$$\frac{3}{\pi}\int_{\frac{V}{2}}^{\frac{V+1}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt=\frac{1}{\pi}\left\{4\mathrm{Si}4x-2\mathrm{Si}2x+\frac{\cos4x-\cos2x}{x}-\frac{\sin^2x\sin2x}{x^2}-\frac{\sin^4x}{x^3}\right\}_{\frac{V}{2}}^{\frac{V+1}{2}} \tag{11}$$

其中 $\mathrm{Si}x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 表示积分正弦函数[3]. 计算可得：

当 $n\geqslant6$，

$$I_1<\frac{3}{\pi}\sum_{V=1}^{5}\left|\frac{\frac{V+1}{12}}{\sin\frac{V+1}{12}}\right|^4V\int_{\frac{V}{2}}^{\frac{V+1}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt<0.8699288, \tag{12}$$

$$I_2=\frac{3}{\pi n^3}\int_{\frac{6}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}[2nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)dt<\frac{3\cdot2n}{\pi n^3}\left[\left|\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|^4\int_{\frac{6}{2n}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^3}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tdt}{\sin^4t}\right]$$

$$=\frac{1}{48\pi\sin^4\frac{1}{2}}+\frac{3}{\pi n^2}\left[-\frac{1}{4\sin^4\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left(\mathrm{ctg}^3\frac{1}{2}+3\mathrm{ctg}\frac{1}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}-4\ln\sin\frac{1}{2}\right)\right].$$

当 $n\geqslant6$； $I_2<\frac{1}{36\pi}\left(\mathrm{ctg}^3\frac{1}{2}+3\mathrm{ctg}\frac{1}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}-4\ln\sin\frac{1}{2}\right)$，

$$I_2<0.158414019. \tag{13}$$

这样，当 $n\geqslant6$ 时，$C_n<1+I_1+I_2<2.028342819$.

又从(9)式可算得：$C_2,C_3,C_4,C_5<4-\frac{6}{\pi}$；这样对 $\forall\ n\geqslant1$ 有：

$$C_n\leqslant4-\frac{6}{\pi};\quad \sup_{n\in N}\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\max\limits_x|J_n(f;x)-f(x)|}{\omega(f;\frac{1}{n})}=4-\frac{6}{\pi}.$$

定理 1 成立

系

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\max\limits_x|J_n(f;x)-f(x)|}{\omega(f;\frac{1}{n})}=1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[2t]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt. \tag{13*}$$

§3 定理 2 的证明

i) 对 $f(x)\in C_{2\pi}, n\in N$ 有：

$$\max_x |J_n(f;x)-f(x)| \leqslant (7-\frac{21}{2\pi})\omega(f,\frac{1}{2n}) \tag{14}$$

证明 如定理 1，对 Jackson 算子 $J_n(f;x)$ 有：

$$|J_n(f;x)-f(x)| \leqslant \left\{1+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\right\}\omega(f;\frac{1}{2n}),$$

$$C_n^* = \sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq \text{const}}} \frac{\max\limits_x |J_n(f;x)-f(x)|}{\omega(f;\frac{1}{2n})} \leqslant 1+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt. \tag{15}$$

如定理 1(7*)式，设置函数 $f_{2n,\varepsilon}(x)$ 就可证明：

$$C_n^* = 1+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt, \tag{16}$$

$$C_n^* = 1+[2n\pi]\left(1-\frac{[2n\pi]+1}{4n\pi}\right)-\frac{1}{\pi n(2n^2+1)}\left\{\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\rho_k^{(n)}\sin\frac{([2n\pi]+1)k}{4n}\sin\frac{[2n\pi]k}{4n}}{k\sin\frac{k}{4n}}\right\}. \tag{17}$$

现证对 $\forall\ n\geqslant 1, C_n^*\leqslant C_1^*=7-\frac{21}{2\pi}$. 如定理 1，当 $n\geqslant 5$ 时，

$$C_n^* < 1+\frac{3}{\pi n^3}\left(\int_0^{\frac{5}{2n}}+\int_{\frac{5}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\right)[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = 1+I_1^*+I_2^*,$$

$$I_1^* = \frac{3}{\pi n^3}\int_0^{\frac{5}{2n}}[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < \frac{3}{\pi}\sum_{V=1}^{9}\left(\frac{\frac{V+1}{20}}{\sin\frac{V+1}{20}}\right)V\int_{\frac{V}{4}}^{\frac{V+1}{4}}(\frac{\sin t}{t})^4 dt < 2.199095444 \tag{18}$$

$$I_2^* = \frac{3}{\pi n^3}\int_{\frac{5}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}[4nt]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < \frac{2}{25\pi}(\operatorname{ctg}^3\frac{1}{2}+3\operatorname{ctg}\frac{1}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}-4\ln\sin\frac{1}{2})$$
$$\leqslant 0.456232375. \tag{19}$$

这样当 $n\geqslant 5$ 时，$C_n^*<1+I_1^*+I_2^*<3.655327819$. 又从(17)式可算得：$C_2^*, C_3^*, C_4^*<7-\frac{21}{2\pi}$，所以对 $\forall\ n\geqslant 1$ 有：

$$C_n^* \leqslant (7-\frac{21}{2\pi}) \doteq 3.657746195. \tag{20}$$

这样(14)式成立。

ii) 设 Π_n^T 表示阶数不超过 n 的三角多项式全体，因为 $J_n(f;x)\in \Pi_{2n-2}^T$，由(14)式有：

$$E_{2n-2}(f)_c \leqslant (7-\frac{21}{2\pi})\omega(f;\frac{1}{2n}).$$

若 n 是偶数，设 $n=2m$，

$$E_n(f)_c = E_{2m}(f)_c \leqslant E_{2m-2}(f)_c \leqslant (7-\frac{21}{2\pi})\omega(f;\frac{1}{2m}) = (7-\frac{21}{2\pi})\omega(f;\frac{1}{n}).$$

若 n 是奇数，设 $n=2m-1$，

$$E_n(f)_c = E_{2m-1}(f)_c \leqslant E_{2m-2}(f)_c \leqslant (7 - \frac{21}{2\pi})\omega(f; \frac{1}{2m})$$
$$\leqslant (7 - \frac{21}{2\pi})\omega(f; \frac{1}{2m-1}) = (7 - \frac{21}{2\pi})\omega(f; \frac{1}{n})$$

定理 2 成立.

参 考 文 献

[1] H. Корнейчук, ДАН. СССР, 145, No. 3(1961)514—515.

[2] 王兴华, 数学学报; 14, No. 2(1964)231—237.

[3] 数学手册, 高等教育出版社, (1979)1317.

[4] 孙永生, 北京师范大学学报 No. 1(1981)1—6.

[5] A. Лигун; Докл. АН, СССР, 283, No. 1(1985)34—38.

[6] 叶南发, 数学研究与评论, 10, No. 1(1990).

[7] 庄碧如, 新疆大学学报, 7, No. 2(1990), 17—26.

[8] Ye. Nanfa, Amer Math. Reviews, 90b: 42008, 984.