第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

FP—内射环和IF环的几个特征*

陈　建　龙
(南京农业大学基础部,210014)

摘　要

本文给出了 FP—内射环和 IF 环的如下几个特征:

(1) R 为右 FP—内射环当且仅当任意左 R—模正合列

$$R^n \to R^n \to N \to 0$$

N 为无挠模,当且仅当任一 n 阶矩阵环为右 P—内射环;

(2) R 为左 IF 环当且仅当任一有限生成左 R—模均可嵌入平坦模;

(3) R 为 IF 环当且仅当 R 为伪凝聚的上平坦环.

1. 引　言

本文中的环指有单位元的结合环,模指酉模. 设 R 为任意环,左 R—模 M 称为 FP—内射模[1],如果对任何有限表示(finitely presented)模 P,均有 $\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$;M 称为 F—内射模或上平坦[2](P—内射),如果对任何有限生成(主)左理想 I,均有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$,显然地,这等价于对任何有限生成(主)左理想 I,任何左 R—模同态 $f: I\to M$,均存在 $y\in M$,使 $f(a)=ay$,对所有 $a\in I$. 利用 FP—内射(F—内射)可以很好地刻划凝聚环(coherent);半遗传环;(Von Neumann)正则环. 由此可见,FP—内射(F—内射)模是模范畴里新出现的重要概念. 环 R 称为左 FC 环[2],如果 R 为左凝聚左 F—内射环;环 R 称为右 IF 环,如果每一内射右 R—模是平坦模,易知,左 FC 环为右 IF 环;(双边)IF 环等价于(双边)FC 环[3];左 IF 环为正则环或弱整体维数为∞[3][4]. 由此可见,IF(FC)环是一类比正则环和 QF 环更广的重要环类. 关于 FP—内射环和 IF 环,可参见[1—5]. 本文旨在给出 FP—内射环和 IF 环的几个特征. 本文 f.p. 表示有限表示模;f.g. 表示有限生成模.

2. FP—内射环(模)的特征

如众周知,$\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$ 当且仅当每一正合列 $0\to M\to N\to P\to 0$ 为分裂的[6,Cor7.20]. 由此立得,左 R—模 M 为 FP—内射(F—内射)模,当且仅当每一正合列 $0\to M\to N\to P\to 0$ 为分裂的,这里 P 为任一 f.p.(循环 f.p.)左 R—模.

* 1990年7月2日收到.

引理 1[2] (1)右 R－模 M 为 FP－内射模$\Leftrightarrow$对任意自然数 p,q 和任一 $p\times q$ 阶矩阵 C,若 $m\in M^q\backslash M^pC$,则存在 $a\in R^q$,使得 $Ca^t=0,ma^t\neq 0$.

(2)右 R－模 M 为 F－内射模$\Leftrightarrow$对任一自然数 n,任意 $c\in R^n$,若 $m\in M^n\backslash Mc$,则存在 $a\in R^n$,使得 $ca^t=0,ma^t\neq 0$.

这里 $a\in R^n$ 表示 a 为行向量,a^t 表示 a 的转置.

定理 1 右 R－模 M 为 FP－内射模$\Leftrightarrow$对任一自然数 n,和任意 n 阶矩阵 C,若 $m\in M^n\backslash M^nC$,那么存在 $a\in R^n$,使得 $Ca^t=0,ma^t\neq 0$.

证明 由引理 1,只要证充分性. 设 p,q 为任意自然数,C 为 $p\times q$ 阶矩阵,$m\in M^q\backslash M^pC$.

若 $p=q$,则由假设存在 $a\in R^q$,使得 $Ca^t=0,ma^t\neq 0$.

若 $p>q$,此时令 $\overline{C}=(C,0)$ 为 p 阶矩阵,$\overline{m}=(m,0)\in M^p$,由 $m\notin M^pC$,易知 $m\notin M^p\overline{C}$,于是存在 $a\in R^p$,使 $\overline{C}a^t=0,\overline{m}a^t\neq 0$,让 $a=(a_1,a_2),a_1\in R^q$,清楚地,$0=\overline{C}a^t=Ca_1^t$, $0\neq\overline{m}a^t=ma_1^t$. 于是存在 $a\in R^q,Ca_1^t=0,ma^t\neq 0$.

若 $p<q$,同理可证,存在 $a\in R^q$,使得 $Ca^t=0,ma^t\neq 0$. 至此我们证明了充分性.

引理 2 (1) R 为右 FP－内射环$\Leftrightarrow$f. p. 左 R－模为无挠(torsionless)模[1,Th2.3].

(2) R 为右 F－内射环$\Leftrightarrow$对任意左 R－模正合列:$R\to R^n\to N\to 0$,N 为无挠模[2,T1.4].

定理 2 R 为右 FP－内射环$\Leftrightarrow$对任意左 R－模正合列:$R^n\to R^n\to N\to 0$,N 为无挠模.

证明 充分性. 对任意自然数 n,C 为 n 阶矩阵,作 $f:R^n\to R^n,x\to xC$,易知 f 为左 R－模同态,且 $\mathrm{Im}f=R^nC$,由假设 $N=R^n/R^nC$ 为无挠模. 设 $m\in R^n\backslash R^nC,0\neq\overline{m}\in N$,记 $m=(m_1,\cdots,m_n)$,由 N 的无挠性,一定存在 $g:N\to R,g(\overline{m})\neq 0$. 令 $e_i=(0,\cdots,1_i,0\cdots,0)$,且记 $a_i=g(\overline{e}_i)$,而

$$0\neq g(\overline{m})=m_1g(\overline{e}_1)+\cdots+m_ng(\overline{e}_n)=ma^t,$$

其中 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,由 $e_iC\in R^nC,e_iC_a{}^t=g(\overline{e}_iC)=0,(i=1,\cdots,n)$,从而 $C_a{}^t=0$,这样我们找到了 $a\in R^n$,使得 $Ca^t=0$,且 $ma^t\neq 0$,由定理 1,R 为右 FP－内射环.

必要性,由引理 2 或证明如下:

对任何左 R－模正合列:$R^n\xrightarrow[f]{}R^n\to N\to 0$,一定存在 n 阶矩阵 C,使得 $f(x)=xC,\mathrm{Im}f=R^nC$,且 N 同构于 R^n/R^nC,现设 $0\neq\overline{m}\in R^n\backslash R^nC$,即 $m\in R^n\backslash R^nC$,由 R 的右 FP－内射性知:存在 $a\in R^n$ 使得 $Ca^t=0$,且 $ma^t\neq 0$,令 $g:R^n/R^nC\to R,(\overline{x_1,\cdots,x_n})\to\sum x_ia_i$. 由 $Ca^t=0$,易知 g 为左 R－模同态,且 $g(\overline{m})=\sum m_ia_i=ma^t\neq 0$. 这样证得了 R^n/R^nC 为无挠模,当然 N 也是无挠的.

由 FP－内射(F－内射,P－内射)的定义,易见,FP－内射模为 F－内射模,F－内射模为 P－内射模. 然而,我们不知道是否左 F－内射模为左 FP－内射模(尽管对左凝聚环是对的). 以下给出它们间的一个关系.

定理 3 以下三条件等价:

(1) R 为右 FP－内射环.

(2) $\mathrm{Ext}_R^1(N,R)=0$,对任何右 R－模正合列:$R^n\to R^n\to N\to 0$.

(3) R 的任意阶矩阵环 $M_n(R)$ 为右 P－内射环.

证明 (2)$\Rightarrow$(1) 对任意左 R－模正合列:

$$F_0\to F_1\to M\to 0$$

其中 $F_0=F_1=R^n$,由[1]得正合列:

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(N,R) \to M \to M^{**} \to \mathrm{Ext}_R^2(N,R) \to 0$$

其中 $F_1^* \to F_0^* \to N \to 0$ 为正合列，$F_1^* = F_0^* = R^n$，由假设，$\mathrm{Ext}_R^1(N,R)=0$，即 $0 \to M \to M^{**}$ 为正合，于是 M 为无挠模，再由定理 2，R 为右 FP－内射环.

(1)⇒(2) 显然.

(1)⇒(3) 由 FP－内射环的定义易见 FP－内射环为 Morita 不变量，于是(3)是明显的.

(3)⇒(1) 首先注意到：环 S 为右 P－内射环当且仅当对任 $a\in S$，若 $m \notin Sa$，则存在 $c\in S$，使得 $ac=0$，且 $mc\neq 0$. 现设 A 为 n 阶矩阵，$m\in R^n\backslash R^nA$，记 $m=(m_1,\cdots,m_n)$，令 $M=(m^t,0)^t\in M_n(R)$，易见 $M\notin M_n(R)A$. 于是从 $M_n(R)$的右 P－内射性，存在 $C\in M_n(R)$，$AC=0$，$MC\neq 0$，现记 $C=(c_1,\cdots,c_n)$

$$0 \neq MC = \begin{pmatrix} mc_1 & \cdots & mc_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

因而存在 c_i，$mc_i\neq 0$，记 $b=c_i^t$，则 $mb^t\neq 0$，$Ab^t=Ac_i=0$（因为 $AC=0$），由定理 1，R 为右 FP－内射环.

推论 1 右 F－内射环为 Morita 不变量当且仅当它为右 FP－内射环.

注 此推论说明[2，引理 2.5]是有疑虑的.

引理 3 (1) M 为左 F－内射模当且仅当以下两条件满足：

(i) $r_M(I\cap J)=r_M(I)+r_M(J)$，对任何 f.g. 左理想 I 和 J；

(ii) $r_Ml(a)=aM$，对任何 $a\in R$.

(2) M 为左 P－内射模当且仅当(ii)成立.

这里 $r_M(I)=\{x\in M \mid Ix=0\}$，$l(I)=\{a\in R \mid aI=0\}$，$I$ 为 R 的一个子集.

证明 (1)必要性. 显然 $r_Ml(a)\supseteq aM$，且 $r_M(I\cap J)\supseteq r_M(I)+r_M(J)$. 反之，设 $x\in r_M(I\cap J)$ 和 $y\in r_Ml(a)$，作：

$$f: I+J\to M,\ c+b\to bx,\ c\in I, b\in J,$$

$$g: Ra\to M,\ ra\to ry,\ r\in R,$$

则易知 f,g 均为左 R－模同态，由假设存在 $m\in M$ 使得 $f(c+b)=(c+b)m$，$\forall\ c\in I, b\in J$，于是 $cm+bm=bx$，$\forall\ c\in I, b\in J$. 特别地，$cm=0$，$\forall\ c\in I$ 和 $b(x-m)=0$，$\forall\ b\in J$，因此 $m\in r_M(I)$，$x-m\in r_M(J)$，故 $x\in r_M(I)+r_M(J)$. 类似地可证，$y\in aM$. 由此即知(i)(ii)两式成立.

充分性. 设 $I=Ra$，$f: Ra\to M$ 为左 R－模同态，则易知 $f(a)\in r_Ml(a)=aM$，于是存在 $y\in M$，$f(a)=ay$. 现设 $I=I_1+I_2$，I_1 和 I_2 分别由一个和 $n-1$ 个元生成，$f: I\to M$，由归纳假设，存在 y_1，$y_2\in M$，使得

$$f(a_1)=a_1y_1,\ \forall\ a_1\in I_1;\quad f(a_2)=a_2y_2,\ \forall\ a_2\in I_2.$$

易知 $y_1-y_2\in r_M(I_1\cap I_2)=r_M(I_1)+r_M(I_2)$，设 $y_1-y_2=z_1+z_2$，这里 $z_i\in r_M(I_i)$，$i=1,2$，令 $y=y_1-z_1$，则有 $f(a)=ay$，对任何 $a\in I$，于是 M 为左 F－内射模.

(2)的证明由上可知.

注 (1)的证明是由杨同海同志给出的.

定理 4 以下两条等价：

(1) $r_Ml(I)=IM$，对每一 f.g. 右理想 I.

(2) $\mathrm{Ext}_R^1(F/K,M)=0$，对每一 f.g. 自由左 R－模 F 及它的循环子模 K.

证明 (1)⇒(2) 设 K 为 f. g. 自由左 R－模 F 的循环子模，令 $F=R^n, K=Ra$，记 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，现设 $h: K\to M$ 为左 R－模同态，记 $b=h(a)\in M$，则

$$L=\bigcap_{i=1}^{n} l(a_i)=l(\sum_{i=1}^{n}a_iR)=l(I),$$

这里 $I=\sum a_iR$ 为 f. g. 右理想，若 $x\in L$，则 $xa_i=0,(i=1,\cdots,n)$，而

$$xb=xh(a)=h(xa)=h(xa_1,\cdots,xa_n)=0$$

于是 $L\subseteq l(b)$，由(1)得

$$IM=r_Ml(I)=r_M(L)\supseteq r_Ml(b), b\in r_Ml(b)$$

故 $b=a_1s_1+\cdots+a_ns_n$，其中 $s_i\in M\ (i=1,\cdots,n)$. 现定义

$$\bar{h}: F\to M,\ (r_1,\cdots,r_n)\to r_1s_1+\cdots+r_ns_n,$$

易知 $\bar{h}$ 为左 R－模同态，且 $\bar{h}$ 为 h 的扩张. 由此立知：$\mathrm{Ext}_R^1(F/K,M)=0$.

(2)⇒(1) 对任一 f. g. 右理想 I，设 $I=a_1R+\cdots a_nR$，显然有 $IM\subseteq r_Ml(I)$. 反过来，设 $x\in r_Ml(I)$，定义 $f: R\to R^n,\ r\to(ra_1,\cdots,ra_n)$. 记 $K=f(R)$，则 K 为 R^n 的循环子模，再作 $h: K\to M,\ f(r)\to rx$，易知 h 为左 R－模同态，由(2)知，存在 $\bar{h}: F\to M$，使 $\bar{h}(k)=h(k)$，对任一 $k\in K$.

$$x=\bar{h}f(1)=\bar{h}(a_1,\cdots,a_n)=a_1\bar{h}(e_1)+\cdots+a_n\bar{h}(e_n)\in IM.$$

这样证明了 $r_Ml(I)\subseteq IM$，于是 $r_Ml(I)=IM$.

推论 2 设 M 为左 FP－内射 R－模，则 $r_Ml(I)=IM$，对任一 f. g. 右理想 I.

由于 R/I 为无挠模当且仅当 $rl(I)=I$，于是我们有：

推论 3 以下几条等价(比较引理 2 和定理 2)：

(1) $rl(I)=I$，对任一 f. g. 右理想 I.

(2) $\mathrm{Ext}_R^1(F/K,R)=0$，对任一 f. g. 自由左 R－模 F 及它的循环子模 K.

(3) 对任一右 R－模正合列：$R^n\to R\to N\to 0$，N 为无挠的.

3. IF 环 的 特 征

IF 环作为正则环和 QF 环的推广，已得到了一定的研究[1-5]. 例如，左 IF 环等价于 f. p. 左 R－模可嵌入自由模[3]. 进一步，文献[5]中证明了：R 为 IF 环等价于循环 f. g. 模均可嵌入自由模，换句话说，每个 f. g. 左和右理想均是 R 的有限子集的零化子. 这一节，我们也给出 IF 环的另一些特征.

引理 4[7, Ch. 1, Prop 10. 7] M 为平坦左 R－模当且仅当，若 $\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=0, b_i\in R, x_i\in M$，则存在 $u_1,\cdots,u_m\in M$ 和 $a_{ij}\in R$，$(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$，使得

$$x_i=\sum_j a_{ij}u_j,\ \sum_i b_ia_{ij}=0.$$

定理 5 R 为左 IF 环当且仅当任一 f. g. 左 R－模均可嵌入平坦模.

证明 若 R 为左 IF 环，则任一左 R－模均可嵌入平坦模[1]. 反之，若任一 f. g. 左 R－模均可嵌入平坦模，设 M 为内射左 R－模，$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=0, b_i\in R, x_i\in M$， 现记 $N=Rx_1+\cdots+Rx_n$ 为

f. g. 左 R－模，则 N 可嵌入某平坦模 F，由引理 4 可知，存在 $u_1,\cdots,u_m\in F$ 和 $a_{ij}\in R$，$(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$，使得 $x_i=\sum_j a_{ij}u_j$，$\sum_i b_i a_{ij}=0$. 又 M 为左内射模，存在 $g:F\to M$ 使 $g(n)=n$，对任一 $n\in N$，特别地，

$$x_i=g(x_i)=\sum_j a_{ij}g(u_j)=\sum_j a_{ij}y_j,$$

其中 $y_i=g(u_i)\in M$. 于是再引用引理 4，M 为平坦左 R－模，因而证明了 R 为左 IF 环.

引理 5[7, Ch1, Prop. 13. 3] R 为左凝聚环当且仅当 $l(a)$ 为 f. g. 左理想，对 $\forall\ a\in R$， 且两 f. g. 左理想之交为 f. g. 的.

定理 6 R 为 IF 环当且仅当 R 为伪凝聚环(pseudo--coherent)且为 F－内射环.

这里 R 称为左伪凝聚环，如果对每一 f. g. 右理想 I，$l(I)$ 为 f. g. 左理想.

证明 只要证充分性 设 $a,b\in R$，由引理 3 得：

$$rl(aR+bR)=r(l(a)\cap l(b))=rl(a)+rl(b)=aR+bR.$$

利用归纳可知，对任一 f. g. 右理想 I，$r(l(I))=I$，又 $r(l(I))$ 为 f. g.，则 $I=r(K)$，K 为某 f. g. 左理想，现设 I_1,I_2 为 f. g. 右理想，则有 f. g. 左理想 K_1,K_2 满足

$$I_i=r(K_i),\ I_1\cap I_2=r(K_1)\cap r(K_2)=r(K_1+K_2).$$

又 R 为右伪凝聚环，$I_1\cap I_2$ 为 f. g. 右理想，再由引理 5，知 R 为右凝聚环. 同理可证，R 为左凝聚环. 因此，R 为 FC 环，当然为 IF 环.

一个环称为左 CF 环，如果每一左理想均为 R 的某一有限子集的左零化子[8]，换句话说，每个循环左 R－模均可嵌入自由模；R 为 CF 环等价于 QF 环[8]，文献[8]中证明了：若 R 为左 CF 环，且 f. g. 右理想为 R 的有限子集的零化子(或右理想为右零化子)，则 R 为 QF 环. 以下我们考虑左 CF 环，且 f. g. 右理想为右零化子的环.

定理 7 设 R 为左 CF 环，且 f. g. 右理想为右零化子，则 R 为右 FC 环且为左 F－内射的.

证明 (1)设 I 为右零化子，则由假设 $l(I)=l(K)$，K 为某 f. g. 右理想

$$I=rl(I)=rl(K)=K,$$

即每个右零化子均 f. g.，特别地，$r(a)$ 为 f. g.，对 $\forall\ a\in R$. 现让 I_1,I_2 为 f. g. 右理想， 则 $I_i=r(K_i)$，K_i 为某左理想，$i=1,2$，于是

$$I_1\cap I_2=r(K_1)\cap r(K_2)=r(K_1+K_2)$$

为右零化子. 因而为 f. g.，所以由引理 5，R 为右凝聚环.

(2)由于 R 为左 CF 环，则 $Ra=lr(a)$，对 $\forall\ a\in R$，现设 I_1,I_2 为 f. g. 右理想，$I_i=r(K_i)$，K_i 为左理想，$i=1,2$，则

$$l(I_i)=lr(K_i)=K_i,$$

$$l(I_1\cap I_2)=l(r(K_1)\cap r(K_2))=lr(K_1+K_2)=K_1+K_2=l(I_1)+l(I_2).$$

于是由引理 3，R 为右 F－内射环.

(3)由于 f. g. 右理想为右零化子，则 $rl(a)=aR$，对任 $a\in R$，让 K_1,K_2 为 f. g. 左理想，记 $K_i=l(I_i)$，这里 I_i 为 f. g. 右理想，$i=1,2$，于是有

$$r(K_i)=rl(I_i)=I_i,$$

$$r(K_1\cap K_2)=r(l(I_1)\cap l(I_2))=rl(I_1+I_2)=I_1+I_2=r(K_1)+r(K_2).$$

应用引理 3，R 为左 F－内射环.

推论 4 设 R 为左 CF 的左 FP－内射环，则 R 为右 FC 环.

推论 5 设 R 满足定理 7 的条件，且 R 为左伪凝聚环，则 R 为 QF 环.

证明 由定理 7 和定理 6 知，R 为 IF 环，再由[8，Cor. 2.4]，R 为 QF 环.

作者对南京大学佟文廷教授和安徽师大唐怀鼎教授的指导深表谢意.

参 考 文 献

[1] Jain, S., *Flat and FP－injective*, Proc. A. M. S., 41; 2(1973), 437－442.

[2] Damiao, R. F., *Coflat rings and modules*, Pac. J. Math., 81; 2(1979), 349－369.

[3] Cobly, R. R., *Rings which have flat injective modules*, J. Algebra, 35; (1975), 239－252.

[4] 徐岩松，FP－内射模决定凝聚环与 IF 环，数学研究与评论，6; 1(1986), 25－30.

[5] Gomez Pardo, J. L. and Rodriguez, N., *On some properties of IF rings*, Quaestiones Math., 5; (1983), 395－405.

[6] Rotman, J. J., *An Introduction of Homological Algebra*, New York, 1979.

[7] Stenstrom, B., Rings of Quotients, Berlin－Heidelberg, New York, 1975.

[8] Gomez Pardo, J. L., *Embedding cyclic and torsion－free modules in free modules*, Arch. Math., 44; (1985), 503－510.

Some Characterizations of FP-injective Rings and IF Rings

Chen Jianlong

(Nanjing Agricultural University, China)

Abstract

In this paper, we give some characterizations of right FP-injective rings and IF rings. For example, (1) R is a right FP-injective ring iff ecery left R- module exact sequence:

$$R^n \longrightarrow R^n \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

where N is torsionless module, iff $M_n(R)$ is right P-injective ring, for each natural number n. (2) R is left IF ring iff every finitely generated left R-module is embeddable in a flat module. (3) R is IF ring iff R is pseudo-coherent and coflat ring.