第12卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 12 No. 3
1992年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1992

不可约布尔矩阵的幂敛指数集*

吴小军　　邵嘉裕

（同济大学应用数学系，上海 200092）

摘　要

本文在$\left[\frac{n}{p}\right]\geq 35$时（$[x]$表示$x$的整数部分），刻画了周期为$p$的$n$阶不可约布尔矩阵的幂敛指数集$I_{n,p}$，给出了$I_{n,p}$的一个表达式．

§1　引　言

布尔矩阵是指元素按如下规则运算的(0，1)矩阵：

$$a+b=\max\{a,b\},\ a\cdot b=\min\{a,b\},\ (a,b\in\{0,1\}),$$

n阶布尔矩阵的集合记为B_n．一个布尔方阵A的幂敛指数$k(A)$是满足如下条件的最小非负整数k：

条件：　存在正整数p　使

$$A^k=A^{k+p} \tag{1.1}$$

而称满足条件$A^{k(A)}=A^{k(A)+p}$的最小正整数p为A的周期，记作$P(A)$．

任一n阶布尔矩阵A可自然地用如下的有向图$D(A)$（称为A的伴随有向图）来表示：$D(A)$顶点集为$\{1,2,\cdots,n\}$，而从点i到点j有一条弧当且仅当$a_{ij}\neq 0$．易见A也就是$D(A)$的邻接矩阵．因此，对布尔矩阵的置换相似不变量（例如幂敛指数和周期）的研究常常采用图论的方法．熟知在这样的矩阵一图对应下，A^m的(i,j)位置$(A^m)_{ij}$不为0的充要条件是$D(A)$中存在从点i到点j的长为m的途径．因此幂敛指数$k(A)$的图论意义即是满足如下条件的最小非负整数k：

条件：　存在正整数p，使对任意点$i,j\in V(D(A))$，$D(A)$中存在i到j的长为k之途径当且仅当存在i到j的长为$k+p$之途径．

为方便计，我们规定一个有向图D的幂敛指数$k(D)$及周期$p(D)$为与D相应的布尔矩阵A的幂敛指数与周期．即$k(D)=k(A)$，$p(D)=p(A)$（若$D=D(A)$）．熟知若D为强连通，则$p(D)$等于D中所有圈长的最大公约数，并且D中任意两点间的不同途径之长均模$p(D)$同余．

称布尔方阵$A\in B_n$为可约，若存在某n阶置换阵P，使$P^TAP=\begin{pmatrix}B & 0\\ D & C\end{pmatrix}$，其中$B$、$C$为非空

* 1990年10月20日收到．

方阵，否则称 A 为不可约. 熟知 A 为不可约的充要条件是 $D(A)$ 为强连通，记 $\mathbf{D}(n,p)=\{D|D$ 是 n 阶周期为 p 的强连通有向图$\}$，$I_{n,p}=\{k(D)|D\in\mathbf{D}(n,p)\}$. 我们用 $L(D)$ 表示 D 中所有不同圈长的集合. 在本文中规定，若 $a\in L(D)$，则 $a'=\frac{a}{p(D)}$. 在无特别说明下，本文总有 $r=[\frac{n}{p}]$（即 $\frac{n}{p}$ 的整数部分），$s=n-pr$，即 $n=pr+s$，$0\leqslant s\leqslant p-1$.

对 $I_{n,p}$ 的研究引起了不少人的兴趣，1970 年捷克数学家 Schwarz 用二元关系的理论在文[1]中证明了：

$$k(D)\leqslant p(r^2-2r+2)+s,\quad \forall D\in\mathbf{D}(n,p) \tag{1.2}$$

1987 年邵嘉裕和李乔在文[2]中用矩阵方法也证明了(1.2)，并且刻画了等式情形. 一年后，他们又在文[3]中得到了：

$$\{1,2,\cdots,p[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s\}\subseteq I_{n,p},\quad r\geqslant 35 \text{ 时}. \tag{1.3}$$

不久邵嘉裕证明了下述定理.

定理 A([4]) 设 $D\in\mathbf{D}(n,p)$，$|L(D)|\geqslant 3$，D 的最小圈长 $r_\lambda>p$，则有 $k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

本文在 $r\geqslant 35$ 时，给出了 $I_{n,p}$ 如下形式的表达式：

$$I_{n,p}=I_1(n,p)\cup I_2(n,p),$$

其中 $I_1(n,p)=\{1,2,\cdots,p[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s\}$，

$$I_2(n,p)=\bigcup_{\substack{n\geqslant r_1>r_2\geqslant 4p\\ r_1+r_2\geqslant (r+3)p\\ \gcd(r_1,r_2)=p}}\{\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+r_1-p,\cdots,\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+n+r_1-r_2-p\}.$$

其中 $\tilde{\varphi}(r_1,r_2)=p\cdot(\frac{r_1}{p}-1)(\frac{r_2}{p}-1)$.

下面我们来引进局部幂敛指数的概念.

定义 1.1 设 D 为周期是 p 的 n 阶强连通有向图，D 中从点 i 到点 j 的局部幂敛指数 $k(i,j)$ 为满足如下条件的最小非负整数 k：

条件： 对任意整数 $l\geqslant k$，D 中存在 i 到 j 的长为 l 的途径当且仅当存在 i 到 j 的长为 $l+p$ 的途径.

易证局部幂指数与整个图的幂敛指数有如下关系

$$k(D)=\max_{i,j\in V(D)}k(i,j). \tag{1.4}$$

定义 1.2 设 D 是周期为 p 的 n 阶强连通有向图，$i,j\in V(D)$. 定义 $m(i,j)$ 为最小非负整数 m，使对任意整数 $a\geqslant 0$，D 中有 i 到 j 的长为 $m+ap$ 之途径. 记 $m(D)=\max\limits_{i,j\in V(D)}m(i,j)$.

熟知 $k(i,j)=(m(i,j)-p+1)^+$（此地 $x^+=\max\{x,0\}$）.

定义 1.3 设 D 是周期为 p 的 n 阶强连通有向图，$R\subseteq L(D)$，D 从点 i 到点 j 相应于圈长子集 R 的相对距离 $d_R(i,j)$ 定义为 i 到 j 的接触 R 中所有圈长的最短途径之长（接触圈长 b 意为接触了某个长为 b 之圈）. 我们又记 $d_R=\max\limits_{i,j\in V(D)}d_R(i,j)$.

定义 1.4 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的 Frobenius 集合 $S(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 定义为 $S(a_1,a_2,\cdots,a_k)=\{\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i|x_1,x_2\cdots,x_k$ 为非负整数$\}$. 当 $\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_k)=1$ 时，存在最小整数 $\varphi=\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_k)$

(称为这组数的 Frobenius 数),使凡 $m\geqslant\varphi$ 者均有 $m\in S(a_1,a_2,\cdots,a_k)$,而 $\varphi-1\notin S(a_1,a_2,\cdots,a_k)$. 当 $\gcd(a_1,\cdots,a_k)=p$ 时,定义它们的广义 Frobenius 数 $\tilde{\varphi}(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 为:$\tilde{\varphi}(a_1,a_2,\cdots,a_k)=p\cdot\varphi(\frac{a_1}{p},\frac{a_2}{p},\cdots,\frac{a_k}{p})$. 特别 $k=2$ 时,$\tilde{\varphi}(a_1,a_2)=p\cdot(\frac{a_1}{p}-1)(\frac{a_2}{p}-1)$.

本文将借助下述定理来估计幂敛指数的上界.

定理 B([3]) 设 $D\in D(n,p)$, $R=\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}\subseteq L(D)$, $\gcd R=\gcd(l_1,l_2,\cdots,l_k)=p$, $i,j\in V(D)$. 则有

$$m(i,j)\leqslant d_R(i,j)+\tilde{\varphi}_R,\quad k(i,j)\leqslant d_R(i,j)+\tilde{\varphi}_R-p+1,$$
$$m(D)\leqslant d_R+\varphi_R,\quad k(D)\leqslant d_R+\varphi_R-p+1.$$

§2 $|L(D)|=2$ 时,$k(D)$的下界

本节在 $L(D)=\{r_1,r_2\}$ 且 $r_2\geqslant 4p$, $r_1+r_2\geqslant(r+3)p$ 的假设下,给出了 $k(D)$ 的一个下界. 我们首先约定 $D\in D(n,p)$, $L(D)=\{r_1,r_2\}$, $r_1>r_2$, $r_1+r_2\geqslant(r+3)p$. 即以下的结论仅在上述条件下成立,我们称一个长为 l 的圈为一个 l-圈. 本文中途径 W 的长用 $|W|$ 表示,D 的弧集合用 $E(D)$ 表示.

定义 2.1 设 W 为一路,称两端在 W 上,与 W 内不交且方向与 W 一致的但不是 W 的某条弧的路为 W 的顺头路,称两端在 W 上,与 W 内不交且方向与 W 相反的路为 W 的逆头路.

定义 2.2 设 $W=x_1x_2\cdots x_m$ 为一途径,W_1 是 x_i 到 x_j 且与 W 内不交的途径($1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$). 则 W_1 在 W 上的相应段是指 W 的 x_i 到 x_j 的子段 $x_ix_{i+1}\cdots x_j$ 记作 x_iWx_j.

定义 2.3 设 C 为一圈,称两端在 C 上且与 C 内不交的路为 C 的桥.

引理 2.1 若 C 为某 r_1-圈,$(x,y)\in E(C)$ 在某 r_2-圈上. 则存在 r_2-圈 C',使 C' 与 C 之交是 C 上的一段路,且 $(x,y)\in E(C')$.

证明 1. 设 W 是一条 y 至 x 的长为 r_2-1 的路,记 $S(W)$ 为 W 上所有 yCx 的顺头路集合. 我们要证 $S(W)\neq\varnothing$. 假设 $S(W)=\varnothing$. 令 $W=x_1x_2\cdots x_{r_2}$, $yCx=y_1y_2\cdots y_{r_1}$,其中 $x_1=y_1=y$, $x_{r_2}=y_{r_1}=x$. 设 z 为 W 与 yCx 的除 y 外的第一个公共点,则由 $S(W)=\varnothing$ 知 $z=x_2=y_2$. 因此由归纳法可得 $x_i=y_i$, $i=3,4,\cdots r_2$. 特别 $x_{r_2}=y_{r_2}$. 于是有 $y_{r_2}=x=y_{r_1}$. 从而 $r_1=r_2$. 矛盾! 故 $S(W_1)\neq\varnothing$.

2. 设 (x,y) 在某 r_2-圈 C_1 上,记 $W_1=yC_1x$,则 $|W_1|=r_2-1$,从而 $S(W)\neq\varnothing$. 对于任意 $B\in S(W_1)$,用 $Q(B)$ 表 B 在 yCx 上的相应段,显然有 $|B|\leqslant|Q(B)|$. 我们要证存在某顺头路 $B_i\in S(W_1)$,使 $|B_i|<|Q(B_i)|$. 若对于每个 $B\in S(W_1)$ 均有 $|B|=|Q(B)|$,则 $S(W_1)$ 中的所有顺头路被其在 yCx 上的相应段取代后就可得一长为 r_2-1 的路 W_2,而 W_2 不再包含 yCx 的顺头路,即 $S(W_2)=\varnothing$. 这与 1. 中的结论相矛盾. 于是取 $C'=B_i\cup(C\backslash Q(B_i))$ 即可使引理得证. □

设 C 为 r_1-圈,记 $r_2(C)=\{C'\mid C'$ 为 r_2-圈,且 C' 与 C 的交为一段路$\}$. 简称 $r_2(C)$ 中的圈为 $r_2(C)$-圈. $r_2(C)$-圈的形式为:C 上的一段路加上 C 的某座桥.

本节的主要目的是要证下述命题:在任意的 r_1-圈上均有某条弧 (x,y),使 $d(y,x)=r_1-1$. 由于 $L(D)=\{r_1,r_2\}$, $r_1>r_2$,所以若 (x,y) 在某 r_1-圈上,则 $d(y,x)=r_1-1$ 或 r_2-1. 由此可知,若对于某 r_1-圈 C 上述命题不成立,则 C 的每条弧均在 r_2-圈上. 因此,以下着重研究每条弧均在某 r_2-圈上的 r_1-圈所具有的性质.

引理 2.2 设 C 为 r_1-圈，$C=v_0v_1v_2\cdots v_{r_1-1}v_0$，$r_1+r_2\geqslant(r+3)p$. 若 C 的每条弧均在 r_2-圈上，则存在 v_{i+2p} 至 v_i 的长为 $2(r_2-p)$ 的途径. 其中 $0\leqslant i\leqslant r_1-1$，$i+2p$ 按模 r_1 读.

证明 只需证 $i=0$ 情形. 首先由 $r_1+r_2\geqslant(r+3)p$ 知 r_1-圈与 r_2-圈至少有 $3p-s$ 个公共点. 于是，若 r_1-圈与 r_2-圈之交是一段路，则如此的 r_1-圈、r_2-圈至少有 $2p$ 条连续的公共弧. 又因为 C 的每条弧均在 r_2-圈上，所以由引理 2.1 知，C 的每条弧均在某 $r_2(C)$-圈上. 若 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{2p}$ 在同一 $r_2(C)$-圈上，则易知引理成立. 因此，不妨设 $v_0,v_1,\cdots,v_{2p}$ 不在同一 $r_2(C)$-圈上. 令 (v_{2p-i},v_{2p-i+1}) 在某 $r_2(C)$-圈 C_i 上 $(i=1,2,\cdots,2p)$. 则 C_i 与 C 至少有 $2p$ 条连续的公共弧. 定义 $l(j)$ 如下 $(j=1,2,\cdots 2p)$：若存在 l，$0\leqslant l\leqslant 2p$，使 $E(v_lCv_{2p})\subseteq E(C_j)$，且 $(v_{l-1},v_l)\notin E(C_j)$，则 $l(j)=l$. 否则，$l(j)=\infty$. 记 $l_0=l(j_0)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2p} l(j)$.

因 $v_0,v_1,\cdots,v_{2p}$ 不在同一 $r_2(C)$-圈上，所以 $l_0\geqslant 1$. 由 $l(1)\leqslant 2p-1$ 知 $l_0\leqslant 2p-1$. 故 $1\leqslant l_0\leqslant 2p-1$. 取 $C_1=C_{j_0}$，$C_2=C_{2p-l_0+1}$，则有：i) $E(v_{l_0}Cv_{2p})\subseteq E(C_1)$，$(v_{l_0-1},v_{l_0})\notin E(C_1)$； ii) $E(v_{l_0}Cv_{2p})\nsubseteq E(C_2)$，$(v_{l_0-1},v_{l_0})\in E(C_2)$，并且 C_2 与 C 至少有 $2p$ 条连续的公共弧. 因此 $E(v_0Cv_{l_0}))\subseteq E(C_2)$，从而 $2p$ 条弧 $(v_{2p-1},v_{2p}),\cdots,(v_0,v_1)$ 能被两个 $r_2(C)$-圈 C_1 及 C_2 在 C 上的连续弧段所覆盖. 于是存在 v_{2p} 至 v_0 的长为 $2(r_2-p)$ 的途径. $\square$

引理 2.3 设 C 为某 r_1-圈，$C=v_0v_1\cdots v_{r-1}v_0$，$B$ 为 C 的桥，其长为 a；B 在 C 上的相应部分为：$v_0v_1\cdots v_l$；$r_1+r_2\geqslant(r+3)p$. 若 C 的每条弧均在某 r_2-圈上，则

i) $a\leqslant l$. ii) 若 $a<l$，则 $a=l-(r_1-r_2)$，且 $r_1-3p<l$.

证明 i) $a\leqslant l$ 是显然的. 否则就可得一长大于 r_1 的圈，引起矛盾.

ii) 令 $l=a\cdot 2p+\beta$，$1\leqslant\beta\leqslant 2p$. 由 $a<l$ 易知，$a=l-(r_1-r_2)$. 利用引理 2.2 可得，存在 $v_{l-(j-1)\cdot 2p}$ 至 $v_{l-j\cdot 2p}$ $(j=1,2,\cdots a)$ 的长为 $2(r_2-p)$ 的某条途径，记其为 W_j. 同样，存在 v_β 至 $v_{r_1-2p+\beta}$ 的长为 $2(r_2-p)$ 的某条途径，记其为 W'. 于是我们可得一闭途径 $W=W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_a\cup W'\cup v_{r_1-2p+\beta}Cv_0\cup B$，其长 $|W|=a\cdot 2(r_2-p)+2(r_2-p)+2p-\beta+a=\frac{l-\beta}{p}(r_2-p)+2(r_2-p)+2p-\beta+l-(r_1-r_2)=(\frac{l-\beta}{p}+3)r_2-r_1\in S(r_1,r_2)$.

断言：若 $\bar{l}r'_2-r'_1\in S(r'_1,r'_2)$. 则 $\bar{l}\geqslant r'_1$ 理由如下：因为

$$\bar{l}r'_2-r'_1=r'_1r'_2-r'_1-r'_2-(r'_1-1-\bar{l})r'_2=\varphi(r'_1,r'_2)-1-(r'_1-1-\bar{l})r'_2,$$

所以 $r'_1-1-\bar{l}<0$，即 $\bar{l}\geqslant r'_1$.

于是由 $(\frac{l-\beta}{p}+3)r'_2-r'_1\in S(r'_1,r'_2)$ 知 $\frac{l-\beta}{p}+3\geqslant r'_1$，也就是 $l\geqslant r_1-3p+\beta$，从而 $l>r_1-3p$. 引理证毕. $\square$

设 C 是每条弧均在某 r_2-圈上的 r-圈. 则由引理 2.3 知，$r_2(C)$-圈的桥在 C 上的相应段之长大于 r_1-3p，从而有 $r_2(C)$-圈在 C 上的一段路之长小于 $3p$. 由此及上述几个引理可证本节主要定理.

定理 2.1 设 $r'_2\geqslant 4$，$r_1+r_2\geqslant(r+3)p$. 若 C 为某 r_1-圈，则存在 C 上的某弧 (x,y). 使 $d(y,x)=r_1-1$.

证明 反证法. 假设 C 上任意弧 (u,v)，均有 $d(u,v)\neq r_1-1$，则 C 的每条弧均在某 $r_2(C)$-圈上. 任取一 $r_2(C)$-圈 C_1，$C_1=v_1Cv_2B_1v_1$，其中 B_1 为 C 的桥，$v_1,v_2\in V(C)$. 则 $|v_1Cv_2|<3p$. 取 C 上的点 v_3,v_4，使 $|v_4Cv_1|\geqslant p$，$|v_2Cv_4|\geqslant p$，$(v_4,v_3)\in E(C)$，$v_4\notin V(C_1)$. 令 C_2 为过 (v_4,v_3) 的 $r_2(C)$-圈，C_2

$=v_5Cv_6B_2v_5$，其中 B_2 为 C 的桥，$v_5,v_6\in V(C)$. 下面分几种情形来证 B_1 和 B_2 没有不在 C 上的公共点.

情形 1： $v_5\in V(C_1)$，$v_6\in V(C_1)$，则闭途径 $v_2B_1v_1Cv_6B_2v_5Cv_2$ 的长要等于 $2r_2-r_1<r_2$，矛盾！所以此情形不可能出现.

情形 2： $v_6\in V(C_1)$，$v_5\notin V(C_1)$，假设 B_1 与 B_2 有不在 C 上的公共点，取 B_1 与 B_2 的公共点 $z\notin V(C)$，使 v_2B_1z 与 zB_2v_5 除 z 外不再有别的不在 C 上的公共点，首先易知 $r'_1\geqslant 5$，$|v_5Cv_1|\geqslant p$，$|v_1Cv_6|\leqslant 2p-1$. 令 $|v_1Cv_6|=e$. 取 v_1Cv_6 上的一点 v_7 使得 $|v_1Cv_7|+|v_7Cv_6|=e$， 且 $0\leqslant|v_1Cv_7|-|v_7Cv_6|\leqslant 1$. 因为 $2p\leqslant|v_1Cv_2|$，$|v_5Cv_6|<3p$ 以及 $|v_1Cv_6|\leqslant 2p-1$. 所以能够取到 $v_8\in v_6Cv_2$，$v_9\in v_5Cv_1$，使 $|v_7Cv_8|=|v_9Cv_7|=p$. 令 $|v_8Cv_2B_1z|=a$，$|zB_1v_1Cv_7|=b$，$|v_7Cv_6B_2z|=c$，$|zB_2v_5Cv_9|=d$. 则有 $a+b=c+d=r_2-p$，$c+b=\alpha r_1+\beta r_2$. 其中 α,β 为非负整数，所以 $2r_2-2p=a+b+c+d=a+d+\alpha r_1+\beta r_2$. 又 $v_2B_1zB_2v_5$ 为 C 的桥，且其在 C 上的相应部分之长 $|v_2Cv_5|\leqslant r_1-3p$. 故由引理 2.3 可知 $a+d=|v_8Cv_9|=r_1-2p$. 从而有 $2r_2-2p=r_1-2p+\alpha r_1+\beta r_2$，即 $(1+\alpha)r_1=(2-\beta)r_2$. 易证此式为一矛盾等式，因此 B_1 与 B_2 没有不在 C 上的公共点.

情形 3： $v_5\in V(C_1)$，$v_6\notin V(C_1)$. 类似于情形 2 可以证明 B_1 与 B_2 没有不在 C 上的公共点.

情形 4： $v_5\notin V(C_1)$，$v_6\notin V(C_1)$. 假设 B_1 与 B_2 有不在 C 上的公共点，取 B_1 与 B_2 的公共点 $z\notin V(C)$，使 v_2B_1z 与 zB_2v_5 除 z 外不再有别的不在 C 上的公共点. 取 $v_7,v_8\in V(C_1)\cap V(C)$，$v_9,v_{10}\in V(C_2)\cap V(C)$，使得 $|v_7Cv_8|=|v_{10}Cv_9|=p$. 令 $|v_8C_1z|=a$，$|zC_1v_7|=b$，$|v_9C_2z|=c$，$|zC_2v_{10}|=d$. 则 $a+b=c+d=r_2-p$.

由于 $v_2B_1zB_2v_5$ 为 C 的桥，且其在 C 上的相应部分之长小于 r_1-3p，所以由引理 2.3 可知 $a+d=|v_8Cv_{10}|$.

又 $v_6B_2zB_1v_1$ 为某桥及若干 r_1-圈和 r_2-圈之并，且此桥在 C 上的相应部分之长是 $|v_6Cv_1|<r_1-3p$，所以 $c+b=|v_9Cv_7|+\alpha r_1+\beta r_2$，其中 α,β 为非负整数. 于是 $2r_2-2p=a+b+c+d=|v_8Cv_{10}|+|v_9Cv_7|+\alpha r_1+\beta r_2=r_1-2p+\alpha r_1+\beta r_2$，从而有 $(1+\alpha)r_1=(2-\beta)r_2$. 易证此式为一矛盾等式. 故 B_1 与 B_2 没有不在 C 上的公共点.

于是有：$n\geqslant|V(B_1)|+|V(B_2)|+|V(C)|-4\geqslant r_2-3p+r_2-3p+r_1=r_1+r_2-3p+r_2-3p\geqslant(r+3)\cdot p-3p+r_2-3p=pr+r_2-3p\geqslant pr+p>n$，矛盾！故定理得证. □

定理 2.2 若 $D\in D(n,p)$，$L(D)=\{r_1,r_2\}$，$r_1>r_2\geqslant 4p$，且 $r_1+r_2\geqslant(r+3)\cdot p$，则 $k(D)\geqslant r_1-p+\tilde{\varphi}(r_1,r_2)$.

证明 由定理 2.1 知，对某 r_1-圈 C，存在 $(x,y)\in E(C)$，使 $d(y,x)=r_1-1$. 从而不存在 y 至 x 的长为 $r_1-1+\tilde{\varphi}(r_1,r_2)-p$ 的途径，于是有 $k(D)\geqslant r_1-p+\tilde{\varphi}(r_1,r_2)$. □

§3 $r\geqslant 35$ 时，幂敛指数集 $I_{n,p}$ 的刻画

本节将给出 $I_{n,p}$ 的一个表达式.

定义 3.1 设 $L(D)$ 为 D 之不同圈长集合，记 $L_1(D)=\{b\in L(D)\mid D$ 中有一个 b-圈不能接触 D 的所有圈长$\}$. 又 $a(D)=\max\limits_{b\in L_1(D)}b$（若 $L_1(D)=\varnothing$，规定 $a(D)=0$）. 易见若 r_x 为 D 之最小圈长，则总有 $a(D)\leqslant n-r_x$.

引理 3.1 设 D 为 n 阶强连通有向图，$L(D)=\{r_1,r_2,\cdots,r_\lambda\}$，$r_1>r_2>\cdots>r_\lambda$，则当 $r_1+r_2>n$ 时，有 $d_{L(n)}\leqslant n-1+\max\{r_1-r_\lambda,a(D)\}$.

证明 文[4]之推论 2.

定理 3.1 设 $D\in \mathbf{D}(n,p)$，r_λ 为 D 之最小圈长，则 $k(D)\leqslant n+r_\lambda(\frac{n}{p}-2)$.

证明 文[4]的引理 5.

引理 3.2 设 $D\in \mathbf{D}(n,p)$，$L(D)=\{r_1,r_2\}$，$r_1>r_2$，且 $r\geqslant 9$，则 $r'_2\leqslant 3$ 时，有 $k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

证明 由定理 3.1 得 $k(D)\leqslant n+r_\lambda(\frac{n}{p}-2)\leqslant n+3p(\frac{n}{p}-2)\leqslant p(4r-3)+s\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$. □

引理 3.3 设 $D\in \mathbf{D}(n,p)$，$L(D)=\{r_1,r_2\}$，$r_1>r_2$，$r\geqslant 9$. 则当 $r_1+r_2\leqslant(r+2)\cdot p$ 时，$k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

证明： 若 $r'_2\leqslant 3$，则由引理 3.2 知结论成立. 因此不妨设 $r'_2\geqslant 4$. 分二种情形讨论.

情形 1： $r'_1+r'_2\leqslant r$. 因 $L(D)=\{r_1,r_2\}$，所以 D 中任意一点或在某 r_1-圈上或在某 r_2-圈上. 从而有 $d_{L(D)}\leqslant n-r_2+n-1\leqslant 2pr-r_2+s+p-1$. 于是 $k(D)\leqslant p\cdot((2r-r'_2)+(r'_1-1)(r'_2-1))+s\leqslant p\cdot(2r-r'_2)+(\frac{r'_1+r'_2-2}{2})^2)+s\leqslant p\cdot(2r-r'_2+(\frac{r-2}{2})^2)+s\leqslant p\cdot(\frac{r^2+4r-4r'_2+4}{4})+s\leqslant p\cdot(\frac{r^2+4r-12}{4})+s\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

情形 2： $r'_1+r'_2\geqslant r+1$. 由 $L(D)=\{r_1,r_2\}$ 及 $r_1+r_2>n$ 知 $a(D)=0$. 因此由引理 3.1 得 $d_{L(D)}\leqslant n-1+r_1-r_2$. 于是 $k(D)\leqslant d_{L(D)}+\tilde{\varphi}_{L(D)}-p+1\leqslant n-p+r_1-r_2+p(r'_1-1)(r'_2-1)$. 因 $r_1+r_2\leqslant(r+2)p$ 及 $r'_2\geqslant 4$，所以 $r_1-r_2=r_1+r_2-2r_2\leqslant(r+2)p-2r_2\leqslant(r+2)p-8p=p(r-6)$. 故有 $k(D)\leqslant n-p+(pr-6p)+p(r'_1-1)(r'_2-1)=p(2r-7)+p(r'_1-1)(r'_2-1)+s\leqslant p(2r-7)+p(\frac{r'_1+r'_2-2}{2})^2+s\leqslant p(2r-7)+p\cdot\frac{r^2}{4}+s\leqslant p(\frac{r^2+8r-28}{4})+s\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

综合情形 1,2 知引理得证. □

定理 3.2 设 $D\in \mathbf{D}(n,p)$，$L(D)=\{r_1,r_2\}$，$r_1>r_2$. 若 $r\geqslant 9$，则当 $r'_2\leqslant 3$ 或 $r_1+r_2\leqslant(r+2)\cdot p$ 时，有 $k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$.

证明 由引理 3.2 及引理 3.3 立得. □

引理 3.4 若 $D\in \mathbf{D}(n,p)$，$L(D)=\{r_1,r_2\}$，$r_1>r_2$，$r_1+r_2>n$，则 $k(D)\leqslant\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+n+r_1-r_2-p$.

证明 首先由 $L(D)=\{r_1,r_2\}$ 及 $r_1+r_2>n$ 知 $a(D)=0$. 因此利用引理 3.1 得 $d_{L(D)}\leqslant n-1+r_1-r_2$. 于是 $k(D)\leqslant\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+d_{L(D)}-p+1\leqslant\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+n+r_1-r_2-p$. □

定理 3.3 若 $r\geqslant 35$，则 $I_{n,p}=I_1(n,p)\cup I_2(n,p)$，其中 $I_1(n,p)=\{1,2,\cdots,p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s\}$，$I_2(n,p)=\bigcup\limits_{\substack{n\geqslant r_1>r_2\geqslant 4p\\ r_1+r_2\geqslant(r+3)p\\ \gcd(r_1,r_2)=p}}\{\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+r_1-p,\cdots,\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+n+r_1-r_2-p\}$

证明 1.

$$I_1(n,p)\subseteq I_{n,p}\qquad (文[3]之定理 6.2),$$
$$I_2(n,p)\subseteq I_{n,p}\qquad (文[3]之定理 4.1),$$

故 $I_1(n,p)\cup I_2(n,p)\subseteq I_{n,p}$.

2. 任取 $D\in D(n,p)$，设 $L(D)=\{r_1,r_2,\cdots,r_\lambda\}$，$r_1>r_2>\cdots>r_\lambda$.

情形 1： $r'_\lambda=1$，则 $k(D)\leqslant n+r_\lambda(\frac{n}{p}-2)\leqslant n+p(r-1)=p(2r-1)+s\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$. 故 $k(D)\in I_1(n,p)$.

情形 2： $\lambda=1$，则 $r'_\lambda=1$. 于是 $k(D)\in I_1(n,p)$.

情形 3： $\lambda\geqslant 3$ 且 $r'_\lambda>1$，则由定理 A 知，$k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$. 故 $k(D)\in I_1(n,P)$.

情形 4： $\lambda=2$ 且 $r'_\lambda\leqslant 3$ 或 $r_1+r_2\leqslant(r+2)\cdot p$. 则由定理 3.2 知，$k(D)\leqslant p\cdot[\frac{r^2-2r+4}{2}]+s$. 故 $k(D)\in I_1(n,p)$.

情形 5： $\lambda=2$ 且 $r'_\lambda\geqslant 4$，$r_1+r_2\geqslant(r+3)\cdot p$，则由定理 2.2 知 $k(D)\geqslant r_1-p+\tilde{\varphi}(r_1,r_2)$. 又由引理 3.4 知，$k(D)\leqslant\tilde{\varphi}(r_1,r_2)+n+r_1-r_2-p$. 故 $k(D)\in I_2(n,p)$.

综合以上情形得 $I_{n,p}\subseteq I_1(n,p)\cup I_2(n,p)$. 于是有 $I_{n,p}=I_1(n,p)\cup I_2(n,p)$. □

参 考 文 献

[1] S. Schwarz, *On a sharp estimation in the theory of binary relations on a finite set*, Crech Math. J. 20 (95)(1970), 703—714.

[2] Shao Jiayu and Li Qiao, *On the index of convergence of irreducible Boolean matrix*, Linear Algebra and Appl. 97(1987), 185—210.

[3] Shao Jiayu and Li Qiao, *The index set of convergeuce of irreducible Boolean atrices*, Linear Algebra and Appl. 22(1988), 285—303.

[4] 邵嘉裕，不可约与几乎可约布尔矩阵的幂敛指数，(《应用数学学报》，待发表).

[5] M. Lewin and Y. Vitek, *A system of gaps in the exponent set of primitive matrices*. Illinois J. Math. 25(1): 87—98(Spring 1981).

The Index Set of Convergence of Irreducible Boolean Matrices

Wu Xiaojun *Shao Jiayu*

(Tongji University, Shanghai, China)

Abstract

In this paper we characterize the index set $I_{n,p}$ for the indices of comergemne of $n\times n$ irreducible Boolean matrices with period p in the case $[\frac{h}{p}]\geq 35$, and give an expression of $I_{n,p}$.