第12卷第3期 1992年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 12 No. 3 Aug. 1992

四元数矩阵的特征值与奇异值估计*

黄礼平

(湖南省湘潭农业学校, 411134)

用 H 表示实数域上的四元数体. 设 $\alpha=a+bi+cj+dk\in H$ (a,b,c,d 是实数), 定义 α 的模为 $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. 易知 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$, $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ $(\alpha,\beta\in H)$. 设 α 的共轭四元数为 $\bar{\alpha}=a-bi-cj-dk$, 显然 $|\alpha^2|=\bar{\alpha}\alpha=\alpha\bar{\alpha}$.

用 $H^{m\times n}$ 表示 H 上的 $m\times n$ 矩阵的集合; 用 $H_R^{n\times n}$ 表示可中心化的 n 阶四元数矩阵[1],[2]的集合; 用 $SH^{n\times n}$ 表示 n 阶自共轭四元数矩阵[3]的集合; 用 $SH_{\geqslant}^{n\times n}$ 表示 n 阶半正定自共轭四元数矩阵[3]的集合; 由[2]知 $SH_{>}^{n\times n}\subset SH_{\geqslant}^{n\times n}\subset SH^{n\times n}\subset H_R^{n\times n}\subset H^{n\times n}$.

设 $A\in H_R^{n\times n}$, 根据谢邦杰定义[1], A 恰有 n 个特征值 $\lambda_i(A)$, $i=1,\cdots,n$, 且 $\lambda_i(A)$ 均为复数. 设 $A\in H^{n\times n}$, 用 A^* 表示 A 的共轭转置矩阵, 由[6]知 $A^*A\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$. 本文定义 A 的奇异值为 $\sigma_i(A)=\sqrt{\lambda_i(A^*A)}$, $i=1,\cdots,n$. 以下本文规定任一个 $A\in H^{m\times n}$ 的奇异值均按降序排列为 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$.

设 $A\in H_R^{n\times n}$ 且 A 的特征值全为实数(例如 $A\in SH^{n\times n}$), 在没有特别指出的情况下, 本文一律规定 A 的特征均按降序排列为 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$.

最近文[4], [5]讨论了四元数矩阵的特征值与奇异值估计, 得到一些较好的结果. 本文进一步讨论了 C^*AC, AB, $A+B$ 的特征值与奇异值估计, 证明了一些高精度的不等式, 推广和改进了[4], [5]中的有关估计.

引理 1[2] 设 $A\in SH^{n\times n}$, 则 $\lambda_i=\lambda_i(A)$ 均为实数, $i=1,\cdots,n$. 且存在广义酉矩阵 U, 使

$$A=U^*\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U. \tag{1}$$

引理 2[3] 设 $A\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$, 则 $\lambda_i(A)\geqslant 0$. 特别如果 $A\in SH_{>}^{n\times n}$, 则 $\lambda_i(A)>0$. $i=1,\cdots,n$.

设 $A\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$, 且 A 有分解式(1), 我们定义 $A^{\frac{1}{2}}$ 为

$$A^{\frac{1}{2}}=U^*\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U, \tag{2}$$

其中 $\lambda_i=\alpha_i(A)\geqslant 0$. 显然 $A=A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, 且仍有 $A^{\frac{1}{2}}\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$.

引理 3 设 $A\in SH_{>}^{n\times n}$, $B\in SH^{n\times n}$, 则 $AB, BA\in H_R^{n\times n}$, 且 $\lambda_i(AB)=\alpha_i(BA)=\lambda_i(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$, $i=1,\cdots,n$.

证明 因为 $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\in SH^{n\times n}$, $AB=A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B)$, $BA=(BA^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$, 由 A 正定知 $A^{\frac{1}{2}}$ 可逆, 所以由[1]

---

* 1990年9月30日收到.

中命题 1 知 AB 与 BA 均可中心化，且 $AB, BA, A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ 的 n 个特征值相同，即 $\lambda_i(AB)=a_i(BA)=\lambda_i(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$，且特征值全为实数. □

引理 4 设 $A,B\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$，则 $AB, BA\in H_R^{n\times n}$，且 $\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA)\geqslant 0, i=1,\cdots,n$.

证明 由[7]中定理 2 知 AB 与 BA 均可中心化，且相似于同一实对角矩阵，仔细考查[7]中定理 2 的证明知这个实对角矩阵中主对角线上的元素非负. 故显然引理 4 成立. □

引理 5[4] 设 $A\in SH^{n\times n}$，用 H^n 表示 H 上的 n 元列向量构成的右向量空间，设 T 为 H^n 的子空间，则对于 $i=1,\cdots,n$ 有

$$\lambda_i(A)=\min_{\dim T=n-i+1}\left(\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T}} x^*Ax\right) \tag{3}$$

其中 $\|x\|=\sqrt{x^*x}(x\in T)$.

定理 1 设 $A,B\in SH^{n\times n}$，$\lambda_i=\lambda_i(A)$，$\mu_i=\lambda_i(B)$，则对于 $i=1,\cdots,n$ 有

$$\max_{r+s=n+i}(\lambda_r+\mu_s)\leqslant\lambda_i(A+B)\leqslant\min_{r+s=i+1}(\lambda_r+\mu_s). \tag{4}$$

证明 记 $i=r+s-1$. 由引理 5 知，存在 $T_1,T_2\subset H^n$，$\dim T_1=n-r+1$，$\dim T_2=n-s+1$，使 $\lambda_r=\max\limits_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_1}}x^*Ax$，$\lambda_s=\max\limits_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_2}}x^*Bx$. 令 $T_0=T_1\cap T_2$，由[8]中 P. 284 定理 6 知 $\dim T_0\geqslant n-r-s+2$. 所以由引理 5 知

$$\begin{aligned}\lambda_i(A+B)&=\lambda_{r+s-1}(A+B)=\min_{\dim T=n-r-s+2}\left(\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T}}x^*(A+B)x\right)\\&\leqslant\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_0}}x^*(A+B)x\leqslant\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_0}}x^*Ax+\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_0}}x^*Bx\\&\leqslant\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_1}}x^*Ax+\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in T_2}}x^*Bx=\lambda_r+\mu_s.\end{aligned}$$

故(4)右边不等式得证. 由已证结果知

$$\begin{aligned}-\lambda_i(A+B)&=\lambda_{n+1-i}(-A-B)\leqslant\min_{r+s=n-i+2}(\lambda_r(-A)+\lambda_s(-B))\\&=-\max_{r+s=n-i+2}(\lambda_{n+1-r}+\mu_{n+1-s})=-\max_{r'+s'=n+i}(\lambda_{r'}+\mu_{s'}).\end{aligned}$$

所以(4)左边不等式也成立. □

定理 2 设 $A\in SH^{n\times n}$，$C\in H^{n\times k}$，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的特征值，$\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_k$ 为 C 的奇异值，则对于 $1\leqslant i\leqslant k$ 有

$$\lambda_i(C^*AC)\leqslant\begin{cases}\min\limits_{1\leqslant r\leqslant i}\lambda_r\sigma_{i+1-r}^2, & \text{若 } \lambda_r\geqslant 0;\\ \min\limits_{1\leqslant r\leqslant i}\lambda_r\sigma_{k+r-i}^2, & \text{若 } \lambda_r\leqslant 0.\end{cases} \tag{5}$$

$$\lambda_i(C^*AC)\geqslant\begin{cases}\max\limits_{i\leqslant r\leqslant k}\lambda_{n-r+i}\sigma_r^2, & \text{若 } \lambda_{n-r+i}\geqslant 0;\\ \max\limits_{i\leqslant r\leqslant k}\lambda_{n-r+i}\sigma_{k+1-r}^2, & \text{若 } \lambda_{n-r+i}\leqslant 0.\end{cases} \tag{6}$$

证明 对每一个 r，因为 λ_r 是实数，故显然 $A-\lambda_rI\in SH^{n\times n}$，$C^*(A-\lambda_rI)C, \lambda_rC^*C\in SH^{k\times k}$，且 $C^*AC=C^*(A-\lambda_rI)C+\lambda_rC^*C$. 由引理 1 知，存在广义西矩阵 U，使得

$$A-\lambda_rI=U^*\operatorname{diag}(\lambda_1-\lambda_r,\cdots,\lambda_n-\lambda_r)U.$$

令 $V=UC$，则

$$C^*(A-\lambda_r I)C = V^*\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda_r,\cdots,\lambda_n-\lambda_r)V \leqslant V^*\begin{pmatrix}(\lambda_1-\lambda_r)I_{r-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V \triangleq D,$$

这里 $D\geqslant C^*(A-\lambda_r I)C$ 是表示 $D-C^*(A-\lambda_r I)C\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$. 因为 $D\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$. $\mathrm{rank}(D)\leqslant r-1$，所以 $\lambda_r(D)\leqslant 0$. 因此由定理 1 易知

$$\lambda_r(C^*(A-\lambda_r I)C)\leqslant\lambda_r(D)\leqslant 0.$$

因此，任意给定 i, $1\leqslant i\leqslant n$，由定理 1 知，可以任取 $1\leqslant r\leqslant i$ 使得

$$\begin{aligned}\lambda_i(C^*AC) &\leqslant \min_{r+s=i+1}\{\lambda_r(C^*(A-\lambda_r I)C)+\lambda_s(\lambda_r C^*C)\}\\ &\leqslant \min_{r+s=i+1}\lambda_s(\lambda_r(C^*C)=\min_{1\leqslant r\leqslant i}\lambda_{i+1-r}(\lambda_r C^*C).\end{aligned}\tag{7}$$

因为当 $\lambda_r\geqslant 0$ 时，$\lambda_{i+1-r}(\lambda_r C^*C)=\lambda_r\sigma_{i+1-r}^2$. 而当 $\lambda_r\leqslant 0$ 时，$\lambda_{i+1-r}(\lambda_r C^*C)=\lambda_r\sigma_{i+1-r}^2$,($\lambda_r C^*C$ 的特征按降序排列)，所以(5)获证. 由(5)与 $\lambda_r(-A)=-\lambda_{n+1-r}$ 知

$$\begin{aligned}-\lambda_i(C^*AC) &= \lambda_{k+1-i}(C^*(-A)C)\\ &\leqslant\begin{cases}\min\limits_{1\leqslant r'\leqslant k+1-i} -\lambda_{n+1-r'}\sigma_{k+2-i-r'}^2, & -\lambda_{n+1-r'}\geqslant 0;\\ \min\limits_{1\leqslant r'\leqslant k+1-i} -\lambda_{n+1-r'},\sigma_{r'+i-1}^2, & -\lambda_{n+1-r'}\leqslant 0.\end{cases}\end{aligned}\tag{8}$$

令 $r=r'+i-1$，则 $n+1-r'=n-r+i$, $k+2-i-r'=k+1-r$，且 $i\leqslant r\leqslant k$，易知由(8)可得(6)式. □.

特别，在定理 2 中当 $k=n$ 时，在(5)式中取 $r=i$，在(6)式中取 $r=n$，显然有

系 1 在定理 2 的条件下，若 $k=n$，则

$$\lambda_i\sigma_n^2\leqslant\lambda_i(C^*AC)\leqslant\lambda_i\sigma_1^2,\ 若\ \lambda_i\geqslant 0;\tag{9}$$

$$\lambda_i\sigma_1^2\leqslant\lambda_i(C^*AC)\leqslant\lambda_i\sigma_n^2,\ 若\ \lambda_i\leqslant 0.\tag{10}$$

注 1 系 1 就是[4]中的定理 4，所以定理 2 改进了[4]中的定理 4 及定理 1、定理 2 有着广泛的应用.

系 2 设 $A,B\in SH_{\geqslant}^{n\times n}$，且 A,B 中至少有一个正定自共轭，则对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\max_{r+s=n+i}\lambda_r(A)\lambda_s(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{r+s=i+i}\lambda_r(A)\lambda_s(B).\tag{11}$$

证明 不妨设 A 正定自共轭，则由引理 3 知 $\lambda_i(AB)=\lambda_i(A^{\frac12}BA^{\frac12})$. 因为 $(A^{\frac12})^*=A^{\frac12}$, $\sigma_i(A^{\frac12})=\lambda_i(A)=\lambda_i$, $\mu_i=\lambda_i(B)\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$. 故由定理 2(此时 $k=n$)知

$$\max_{i\leqslant r\leqslant n}\lambda_r\mu_{n-r+i}\leqslant\lambda_r(AB)\leqslant\min_{1\leqslant r\leqslant i}\lambda_{i+1-r}\mu_r.$$

又因为

$$\max_{i\leqslant r\leqslant n}\lambda_r\mu_{n-r+i}=\max_{i\leqslant r\leqslant n}\mu_r\lambda_{n-r+i}=\max_{r+s=n+i}\lambda_r\mu_s,\ \min_{1\leqslant r\leqslant i}\lambda_{i+1-r}\mu_r=\min_{1\leqslant r\leqslant i}\mu_{i+1-r}\lambda_r=\min_{r+s=i+1}\lambda_r\mu_s,$$

故系 2 得证.

注 2 显然系 2 改进了[5]中的结果.

系 3(Poincar 分隔定理推广) 设 $A\in SH^{n\times n}$, $U_k\in H^{n\times k}$，且 $U_k^*U_k=I_k$，则对于 $1\leqslant i\leqslant k$ 有

$$\lambda_{n-k+i}(A)\leqslant\lambda_i(U_k^*AU_k)\leqslant\lambda_i(A).\tag{12}$$

证明 因为 $\sigma_i^2(U_k)=1$, $1\leqslant i\leqslant k$. 所以令 $C=U_k$，在(5)中取 $r=i$,(6)中取 $r=k$ 即得(12).

系 4 设 $A\in H^{m\times n}$, $B\in H^{n\times k}$，则对于 $1\leqslant i\leqslant k$ 有

$$\max_{i\leqslant r\leqslant k}\sigma_{n-r+i}(A)\sigma_r(B)\leqslant\sigma_i(AB)\leqslant\min_{1\leqslant r\leqslant i}\sigma_r(A)\sigma_{i+1-r}(B).\tag{13}$$

证明 因为 $\sigma_i(AB)=\lambda_i^{\frac{1}{2}}(B^*A^*AB)$, $\sigma_i(A)=\lambda_i^{\frac{1}{2}}(A^*A)$，所以由定理 2 易知(13)成立. □

定理 3 设 $A,B\in H^{m\times n}$，则对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\sigma_i(A+B)\leqslant\min_{r+s=i+1}(\sigma_r(A)+\sigma_s(B)).\tag{14}$$

证明 令 $s=m+n$，定义

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^* & 0\end{pmatrix},\quad \hat{B}=\begin{pmatrix}0 & B\\ B^* & 0\end{pmatrix}\in SH^{s\times s}.$$

显然$A+B=\hat{A}+\hat{B}$，由[4]中定理 3 的证明中知，$\hat{A}$ 的 s 个特征值为 $\sigma_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)\geqslant\cdots\geqslant-\sigma_1(A)$. 对于 $\hat{B}$ 与 $\hat{A}+\hat{B}$ 有类似结果，即它们的从大到小排列的前 n 个特征值恰为它们的奇异值. 所以由定理 1 知

$$\sigma_i(A+B)=\lambda_i(A+B)=\lambda_i(\hat{A}+\hat{B})\leqslant\min_{r+s=i+1}(\lambda_r(\hat{A})+\lambda_s(\hat{B}))=\min_{r+s=i+1}(\sigma_r(A)+\sigma_s(B)).$$

证毕.

设 $A=(a_{ij})\in H^{n\times n}$，定义 A 的迹为 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. 显然，$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$，$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)$，$k\in H$. 由于非交换性，复矩阵迹的一些性质不能推广到四元数矩阵迹中去，但我们有

引理 6 设 $A=(a_{ij})\in SH^{n\times n}$，则

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A).\tag{15}$$

证明 由引理 1 知有广义酉矩阵 $U=(u_{ij})$，使得 $A=U^*\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U$，$\lambda_i=\lambda_i(A)$. 经计算易知 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\bar{u}_{ki}u_{kj}$，所以

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|u_{ki}|^2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.$$ □

定理 4 设 $A,B\in SH^{n\times n}$，$\lambda_i=\lambda_i(A)$，$\mu_i=\lambda_i(B)$，则对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_{n-k+i})\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_i).\tag{16}$$

证明 由引理 1 易知，存在 $U_k\in H^{n\times k}$ 且 $U_k^*U_k=I_k$，使得 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(U_k^*(A+B)U_k)$. 因为 $U_k^*(A+B)U_k\in SH^{k\times k}$，$U_k^*AU_k,U_k^*BU_k\in SH^{k\times k}$，所以由引理 6 与系 3 知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)&=\mathrm{tr}(U_k^*(A+B)U_k)=\mathrm{tr}(U_k^*AU_k)+\mathrm{tr}(U_k^*BU_k)\\&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(U_k^*AU_k)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(U_k^*BU_k)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\sum_{i=1}^{k}\mu_i=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_i).\end{aligned}$$

由已证结果有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B-B)\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(A+B)+\lambda_i(-B))\\&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)-\sum_{i=1}^{k}\mu_{n+1-i},\end{aligned}$$

因为 $\sum_{i=1}^{k}\mu_{n+1-i}\sum_{i=1}^{k}\mu_{n-k+i}$，所以 $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_{n-k+i})\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)$. □

关于 $A+B$ 与 AB 的特征值之和与积($A,B\in SH^{n\times n}$ 或 $A,B\in SH^{n\times n}_{\geqslant}$)还可以进行更深刻的讨论，但难度很大. 因篇幅所限，只好留待后文.

定理 5 设 $A\in H^{m\times n}$, $B\in H^{n\times m}$, 且 $AB\in H_R^{m\times m}$, 则对于 $1\leqslant i\leqslant m$ 有

$$\sigma_n(A)\sigma_m(B)\leqslant|\lambda_i(AB)|\leqslant\sigma_1(A)\sigma_1(B). \tag{17}$$

证明 熟知复数域 C 同构于 H 的子域 $H_1=\{a+bi\,|\,a,b\in R\}$, 故不妨认为 $C=H_1$, 即将每个复数 $a+bi$ 也看作一个四元数 $a=a+bi$. 这里符号 i 有双重意义，但不会引起混淆. 因为 AB 可中心化，设 AB 的(弱)特征多项式为 $f(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\cdots\varphi_s(\lambda)$, 其中 $\varphi_i(\lambda)$ 为实数域上首项系为 1 的多项式，且 $\varphi_1|\cdots|\varphi_s(\lambda)$. 则 AB 相似于 AB 的第一种(弱)有理标准形[9]

$$D=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s),$$

其中 A_i 为属于 $\varphi_i(\lambda)$ 的基本有理简化型[8]. 又因为 D 为实矩阵，所以 D 酉相似于一个上三角形复矩阵 $D_1=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$, 其中 λ_{i_t} 为 D 的特征值, $t=1,\cdots,n$. 易知 λ_{i_t} 即为 $f(\lambda)$ 的根，因此 λ_{i_t} 为 AB 的特征值, $t=1,\cdots,n$. 由上所述，存在可逆矩阵 $P\in H^{n\times n}$, 使 $AB=PD_1P^{-1}$, 即 $(AB)P=PD_1$, 将 P 按列分块为 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 易知 $(AB)P_1=P_1\lambda_{i_1}$, $1\leqslant i_1\leqslant n$. 显然，令 $x=P_1/\|P_1\|$, $\|P_1\|=\sqrt{P_1^*P_1}$, 有 $|\lambda_{i_1}|^2=x^*B^*A^*ABx$. 由引理 5 易知

$$\sigma_m^2(AB)=\lambda_m(B^*A^*AB)\leqslant x^*B^*A^*ABx\leqslant\lambda_1(B^*A^*AB)=\sigma_1^2(AB),$$

所以

$$\sigma_m(AB)\leqslant|\lambda_{i_1}(AB)|\leqslant\sigma_1(AB). \tag{18}$$

又由系 4 知 $\sigma_m(AB)\geqslant\sigma_n(A)\sigma_m(B)$, $\sigma_1(AB)\leqslant\sigma_1(A)\sigma_1(B)$, 故定理得证.

系 5 设 $A,B\in SH^{n\times n}$, 且 $AB\in H_R^{n\times n}$, $|\lambda_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|$, $|\lambda_1(B)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(B)|$, 则对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$|\lambda_n(A)\lambda_n(B)|\leqslant|\lambda_i(AB)|\leqslant|\lambda_1(A)\lambda_1(B)|. \tag{19}$$

证明 因为 $\sigma_i(A)=|\lambda_i(A)|$, $\sigma_i(B)=|\lambda_i(B)|$, $i=1,\cdots,n$. 故由定理 5 显然系 5 成立.

由引理 4 与系 5 显然有

系 6 设 $A,B\in SH^{n\times n}_{\geqslant}$, 则对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\lambda_n(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B). \tag{20}$$

注 3 显然定理 5 与系 5 也推广了[5]中的结果.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰，数学学报，23:4(1980)，522—533.

[2] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，26:3(1980)，1—33.

[3] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，25:2(1980)，19—35.

[4] 庄瓦金，数学进展，17:4(1988)，403—407.

[5] 曹重光，数学研究与评论，10:1(1990)，19—22.

[6] 庄瓦金，数学研究与评论，6:4(1986)，23—25.

[7] 曹重光，数学研究与评论，8:3(1988)，346—348.
[8] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.
[9] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，1(1978)，107—118.

Estimation of Eigenvalues and Singular Values for Quaternions Matrices

Huang Liping
(Xiangtan agricultural school, Hunan, China)

Abstract

In this paper, we give accurate estimation of eigenvalues and singular values of $A+B, C^*AC$ and AB, where A, B and C are quaternions matrices. These results improve and generalze the results in [4] and [5]. We also obtain

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_{n-k+i}) \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B) \le \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_i),$$

for $k=1,\cdots,n$. Where A and B are self-conjugate quaternions matrices of order n, and $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n, \mu_1 \ge \cdots \ge \mu_n, \lambda_1(A+B) \ge \cdots \ge \lambda_n(A+B)$ be the eigenvalues of A, B and $A+B$, respectively.