第12卷第3期
1992年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 3
Aug. 1992

可列无限等可能概型概率场的讨论*

范大茵
(浙江大学应用数学系,杭州 310027)

摘要

假设有某试验,对每次试验而言有可列无限个试验结果,由于某种对称性,每个结果的出现又有一定的均匀性,对这种概型本文称之谓可列无限等可能概型,这种概型的问题其概率场是什么?这是个颇有趣的问题,本文将针对这一问题进行一定的探讨.本文将针对从全体正整数中随机取数的问题的一种特殊的子集类构成事件域,并在其上合理地定义概率,从而建立概率场.

在概率论中曾提出过这样的问题:从全体正整数中随机地选择一数,试求该数能被3整除的概率,或求该数既不能被3整除又不能被5整除的概率.又如从全体正整数中独立地随机地选择两数,试求两数之和为3的倍数的概率等等.这一类问题的共同特点是对每次试验而言其可能结果有可列无限个,而由于某种对称性其取值又有一定的均匀性,对这种概率本文称之谓可列无限等可能概型,对这种概型其概率场是什么?这是个颇有趣的问题,本文将对这一问题进行一定的探讨.

设样本空间为 $S=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$,$(S,\mathscr{B},P)$是一概率场.即 $\mathscr{B}$ 是 S 的某些子集所组成的 σ一域.P 是 $\mathscr{B}$ 上的概率.

很显然,由于 S 中诸元素的对称性,若 S 的某一非空真子集 A 属于 $\mathscr{B}$,那么,将 A 中某一个元素换以 A 的余集中某一元素,其余元素不变,这样所得的新子集亦应属于 $\mathscr{B}$,且两者应有相等的概率.为引文方便起见,对这一要求简称性质 M 或要求 M.基于这一要求,本文将证明对这种既具有可列无限个可能结果,又有某种等可能性的概率场$(S,\mathscr{B},P)$是唯一的,其中 $\mathscr{B}$ 只含有二个元素$\varnothing$及 S,而 P 必为唯一.

下面将给予证明

结论1 单点集$\{a_1\}$不属于 $\mathscr{B}$.

证明 反证法.若不然,假设$\{a_1\}\in\mathscr{B}$.由性质 M 必有$\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\cdots,\{a_k\},\cdots$均属于 $\mathscr{B}$.且它们的概率全相等,设为 a.注意到 $S=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\{a_3\}\cup\cdots$,而 P 是 $\mathscr{B}$ 上的概率,由概率之可列可加性,应有

$$P(S)=a+a+a+\cdots.$$

若 $a=0$,得 $P(S)=0$;若 $a>0$,得 $P(S)=+\infty$.两者均与 $P(S)=1$ 矛盾.即证得单点集$\{a_1\}$不属

* 1990年9月10日收到.

于 $\mathscr{B}$. 从而由性质 M，得 S 的任何单点集均不属于 $\mathscr{B}$.

结论 2 S 的任何非空真子集必不属于 $\mathscr{B}$.

证明 用反证法. 设 A 是 S 的非空真子集，但是 $A\in\mathscr{B}$. 因为 A 是 S 的非空真子集，故必有 S 中某元素 a_{n_0} 不属于 A，于是将 A 中某一元素 a_{n_1} 换以 a_{n_0}，其余元素不变，得新子集 B. 由于 $A\in\mathscr{B}$，由性质 M，必有 B 亦属于 $\mathscr{B}$. 但注意到 $A-B=\{a_{n_1}\}$ 是 S 的单点子集，由结论 1 不属于 $\mathscr{B}$，这与 σ—域 $\mathscr{B}$ 关于差运算封闭矛盾，从而证得结论二成立.

由结论 2 知 $\mathscr{B}$ 中只含不可能事件 $\varnothing$ 以及必然事件 S，从而 $\mathscr{B}$ 上的概率 P 亦被唯一确定.

从以上讨论可以知道，若对这种可列无限等可能概型的概率场 $(S,\mathscr{B},P)$ 提出要求 M 的话，那么这种概率场仅仅为 $\left\{S,\{\varnothing,S\},\begin{matrix}P(\varnothing)=0\\P(S)=1\end{matrix}\right\}$ 而已.

因此，在性质 M 的限制下，本文一开头所提出的问题：从全体正整数中随机地选择一数所得之和为 3 的倍数就不是事件，无概率可言. 因为这是一个可列无限等可能概型的问题，样本空间 $S=\{1,2,3,4,\cdots\}$，$A=\{3,6,9,12,15,\cdots\}$ 是 S 的非空真子集.

同样，对于第二个问题：从全体正整数中随机地挑选一数，该数既不能被 3 整除又不能被 5 整除的问题也无概率可言.

对第三个问题：样本空间

$$S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),\cdots\},$$

$$C=\{(1,2),(2,1),(3,3),(2,4),(4,2),\cdots\},$$

C 是 S 的非空真子集. 亦无概率可言.

但诸如此类的问题是我们颇感兴趣的，希望讨论它们的概率，为此，必须放弃对概率场所加的性质 M 的限制.

下面将针对从全体正整数中随机取数的问题的一种特殊的子集类构成事件域，并在其上合理地定义概率，从而建立概率场.

样本空间 $S=\{1,2,3,4,\cdots\}$—随机地取一个数，样本空间元素以此排序；$S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),\cdots\}$—独立随机地取二个数，样本空间元素以此排序.

考虑满足下列条件的特殊事件域 $\mathscr{B}$：

(1) $\mathscr{B}$ 是由 S 的有限分割 $A_1,A_2,\cdots,A_K$ 所产生的域. 即 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i=S$，$\mathscr{B}$ 是由 $A_1,A_2,\cdots,A_K$ 所生成的域.

(2) 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(A_i\cap\{1,2,3,\cdots,n\})}{n}$ 存在，记为 $p_i\ (i=1,2,\cdots,k)$. 对取两个数的情况则考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(A_i\cap\{S\text{中前}\ n\ \text{个元素}\})}{n}$（其中 $N(T)$ 表示集合 T 中元素的个数）.

对于满足条件(1)，(2)的特殊的域，我们可在其上定义概率：定义 $P(A_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 再由概率的有限可加性，即可得 $\mathscr{B}$ 中任何元素的概率，从而建立概率场.

注意到：

(a) 因 $\sum\limits_{i=1}^{k}N(A_i\cap\{1,2,3,\cdots,n\})=n$，$\sum\limits_{i=1}^{k}N(A_i\cap\{S\text{中前}\ n\ \text{个元素}\})=n$，故 p_1+p_2+

$\cdots + p_k = 1$.

(b) 对 S 的任一子集 A，若 A 同时属于满足(1)，(2)的两个概率场 $(S, \mathscr{B}_1, P_1)$ 以及 $(S, \mathscr{B}_2, P_2)$ 中的 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$，那么必有 $P_1(A) = P_2(A)$.

事实上，对概率场 $(S, \mathscr{B}_1, P_1)$ 而言，设 $\mathscr{B}_1$ 是由 S 的有限分割 $A_1, A_2, \cdots, A_{K_1}$ 所生成的域，那么必有 $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_{ij}$.

按 P_1 的定义：

$$P_1(A) = \sum_{j=1}^{m} P_1(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} \frac{N(A_{ij} \cap \{1,2,\cdots,n\})}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{N(A_{ij} \cap \{1,2,3,\cdots,n\})}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{N \cap (A\{1,2,\cdots,n\})}{n}.$$

类似，因 $A \in \mathscr{B}_2$，设 $\mathscr{B}_2$ 是由 S 的有限分割 $B_1, B_2, \cdots, B_l$ 所生成的域．按 P_2 的定义亦有

$$P_2(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{N(A \cap \{1,2,3,\cdots,n\})}{n}.$$

对取两个数的情况亦一样可证，由(a)，(b)可看出，如此定义的概率是合理的．

在去掉对概率场性质 M 的限制后就可以讨论本文一开头所提问题的概率了．

对例 1： 样本空间 $S = \{1,2,3,4,\cdots\}$．考虑 S 的有限分割：$A_i = \{3m+i \mid m = 0,1,2,\cdots\}$，$(i = 1,2,3)$．则

$$N(A_1 \cap \{1,2,3,\cdots,n\}) = \left[\frac{n+2}{3}\right],$$

$$N(A_2 \cap \{1,2,3,\cdots,n\}) = \left[\frac{n+1}{3}\right],$$

$$N(A_3 \cap \{1,2,3,\cdots,n\}) = \left[\frac{n}{3}\right],$$

易知

$$p_i = \lim_{n\to\infty} \frac{N(A_i \cap \{1,2,3,\cdots,n\})}{n} = \frac{1}{3}, \quad (i = 1,2,3).$$

从而定义

$$P_1(A_1) = P_1(A_2) = P_1(A_3) = \frac{1}{3}.$$

事件域 $\mathscr{F}_1$ 为由 A_1, A_2, A_3 所生成的域．从而可建立概率场 $(S, \mathscr{F}_1, P_1)$．

我们所关心的问题即 A_3 发生的概率为 $\frac{1}{3}$.

对例 2： 样本空间 $S = \{1,2,3,\cdots\}$，考虑 S 的分割：$B_i = \{15m+i \mid m = 0,1,2,3,\cdots\}$ $(i = 1, 2,3,\cdots,15)$，则

$$N(B_i \cap \{1,2,3,4,\cdots,n\}) = \left[\frac{n+(15-i)}{15}\right],$$

从而有

$$p_i = \lim_{n\to\infty} \frac{N(B_i \cap \{1,2,3,\cdots,n\})}{n} = \frac{1}{15}.$$

定义

$$P_2(B_i)=\frac{1}{15},\quad (i=1,2,3,\cdots,15).$$

事件域 $\mathscr{F}_2$ 为由 $B_1,B_2,\cdots,B_{15}$ 所生成的域，从而可建立概率场 $(S,\mathscr{F}_2,P_2)$.

设 C＝“所取之数既不能被 3 整除又不能被 5 整除”. 则 $C=B_1\cup B_2\cup B_4\cup B_7\cup B_8\cup B_{11}\cup B_{13}\cup B_{14}$，易知 $P_2(C)=8\times\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$. 当然亦可运用对立事件及和事件概率公式计算之：

$$P_2(\text{所取之数为 3 的倍数})=P_2(\bigcup_{i=1}^{5}B_{3i})=5\times\frac{1}{15}=\frac{5}{15};$$

$$P_2(\text{所取之数为 5 的倍数})=P_2(\bigcup_{i=1}^{3}B_{5i})=3\times\frac{1}{15}=\frac{3}{15};$$

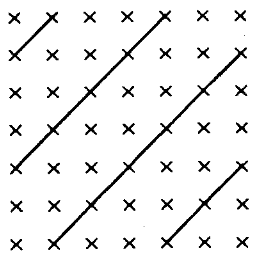
$$P_2(\text{所取之数既是 3 的倍数又是 5 的倍数})=P_2(B_{15})=\frac{1}{15}.$$

故 $P(C)=1-(\frac{5}{15}+\frac{3}{15}-\frac{1}{15})=\frac{8}{15}$. 亦得同样结果.

对例 3：样本空间

$S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),\cdots\}\triangleq\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\}$.

考虑 S 的有限分割 $D_1=\{(x,y)\mid x,y \text{ 正整数}, x+y \text{ 是 3 的倍数}\}$，$D_2=S-D_1$. 为计算 $N(D_1\cap\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n\})$ 作如下考虑：



对任正整数 n，必有正整数 k，使 $k^2\leqslant n<(k+1)^2$. 先计算 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{k^2}\}$ 中和为 3 的倍数的元素个数. 将 S 中前 k^2 个元素，列于左图. 则斜线上的点两数之和为 3 的倍数，对固定的 k，共有多少个点呢？记所求点数为 f_k.

（一） 当 $k=3m+1$ 时，则

$$f_k=\underbrace{2+5+\cdots+(3m-1)}_{m\text{ 项}}+\underbrace{[3m+(3m-3)+\cdots+6+3]}_{m\text{ 项}}$$

$$=(6m+4)\times\frac{m}{2}=(3m+2)m;$$

（二） 当 $k=3m+2$ 时，则

$$f_k=\underbrace{2+5+8+\cdots+(3m+2)}_{m+1\text{ 项}}+\underbrace{[(3m-1)+(3m-4)+\cdots+5+2]}_{m\text{ 项}}$$

$$=3m^2+4m+2;$$

（三） 当 $k=3m$ 时，则

$$f_k=\underbrace{2+5+8+\cdots+(3m-1)}_{m\text{ 项}}+\underbrace{[(3m-2)+\cdots+4+1]}_{m\text{ 项}}$$

$$=3m^2.$$

即在 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{k^2}\}$ 中两数之和为 3 的倍数的元素个数为：

$$f_k=\begin{cases}3m^2+2m, & k=3m+1,\\ 3m^2+4m^2+2, & k=3m+2,\\ 3m^2, & k=3m.\end{cases}$$

即知

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f_k}{(k+1)^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{f_{k+1}}{k^2}=\frac{1}{3}$$

而由 $k^2\leqslant n<(k+1)^2$ 及 $f_k\leqslant N(D_1\cap\{a_1,a_2,\cdots,a_n\})\leqslant f_{k+1}$ 即有

$$\frac{f_k}{(k+1)^2}\leqslant\frac{N(D_1\cap\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\})}{n}\leqslant\frac{f_{k+1}}{k^2}.$$

两边令 $n\to+\infty$. 注意当 $n\to+\infty$ 时必有 $k\to\infty$. 于是得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N(D_1\cap\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\})}{n}=\frac{1}{3}.$$

于是定义 $P_3(D_1)=\frac{1}{3}$，$P_3(D_2)=\frac{2}{3}$. $\mathscr{F}_3=\{\varnothing,D_1,D_2,S\}$，从而可建立概率场 $(S,\mathscr{F}_3,P_3)$，所求问题的概率为 $\frac{1}{3}$.

注意到对 $S_1=\{1,2,3,\cdots\}$ 中任意子集 A，记

$$A^*=\{(x,y)\mid x\in A,y\text{ 为正整数}\},$$

再注意样本空间 $S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),\cdots\}$ 中元素的排序法，必有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N(A\cap\{1,2,3,\cdots,n\})}{n}\text{ 与 }\lim_{n\to+\infty}\frac{N(A^*\cap\{a_1,a_2,a_3,\cdots a_n\})}{n}$$

或同时存在且相等或同时不存在. 因此对独立地随机地取两数的概型中，若讨论第一次所取之数属于自然数集子集 A 的概率问题与直接考虑随机地取一数该数属于自然数 A 的概率问题将得出同样的结论. 同样，若讨论第二次所取数属于自然数集中某子集 B 的概率的问题与直接考虑随机取一数该数属于 B 的概率的问题也将得出同样的结论. 这一点也说明了对于随机地独立地取两数的样本空间元素按本文所给排序是合理的.

对例 4： 设从全体正整数中随机地挑选一数，试求该数或小于等于 5 或能被 3 整除的概率.

解： 考虑 $S=\{1,2,3,4,\cdots\}$ 的有限分割：

$E_1=\{1,2,3,4,5,6,9,12,15,\cdots\}$，

$E_2=S-E_1$.

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N(E_1\cap\{1,2,3,\cdots,n\})}{n}=\frac{1}{3}.$$

定义 $P_4(E_1)=\frac{1}{3}$，$P_4(E_2)=\frac{2}{3}$，$\mathscr{F}_4=\{\varnothing,E_1,E_2,S\}$. 即可得概率场 $(S,\mathscr{F}_4,P_4)$，所求之概率为 $\frac{1}{3}$.

对于上述 1,2,4 例可以统一于同一概率场上讨论：样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$，取 S 的有限分割：

$$G_1=\{1,2,4\},\qquad G_5=\{15\},$$
$$G_2=\{3\},\qquad G_6=\{7,8,11,13,14\},$$
$$G_3=\{5\},\qquad G_7=\{10\},$$
$$G_4=\{6,9,12\},$$
$$H_j=\{15m+j\,|\,m=1,2,3,\cdots\}\quad (j=1,2,3,\cdots,15)$$

易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N(G_i\cap\{1,2,3,\cdots n\})}{n}=0\quad (i=1,2,3,\cdots,7),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N(H_j\cap\{1,2,3,\cdots n\})}{n}=\frac{1}{15}\quad (j=1,2,\cdots,15).$$

故定义

$$P_5(G_i)=0,\ (i=1,2,\cdots,7),\quad P_5=(H_j)=\frac{1}{15},\quad (j=1,2,3,\cdots,15).$$

取 $\mathscr{F}_5$ 为由 $G_1,G_2,\cdots,G_7.H_1,H_2,\cdots,H_{15}$ 所产生的域. 则例 1,2,4 所关心的子集均属于 $\mathscr{F}_5$. 利用概率场 $(S,\mathscr{F}_5,P_5)$ 计算它们的概率可得与前面同样的结果.

显然,对所关心的问题概率场的取法不是唯一的.

综上,我们可看出,在去掉概率场应具备性质 M 的限制后,在从全体自然数中随机地取一数的情况,对 S 的任一子集 A,只要 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{N(A\cap\{1,2,3,\cdots,n\})}{n}$ 存在,那么"所取之数属于 A"便是事件,有概率,其概率与所在的概率场无关,其数值等于此极限值.

对于从全体正整数中独立地随机地取两数的情况亦有类似结论.

不难看出,用上述方法考虑 S 的子集是否是事件及其概率的大小都与 S 中元素的排序法有关. 因而实际上 S 中的元素就不是绝对"平等"的,而是带有序号的,而上述方法是对 S 中元素固定的排序法而言的.

On the Probability Field of the Denumerable Equiprobable Scheme

Fan Dayin
(Zhejiang University, Hangzhou, China)

Abstract

Consider an experiment in which the posible outcomes for each trial are denumerable, and being some kind of symmetry there is somewhat degree of homogeneity for the aooearance of each outcomes.Such a scheme is called as denumerable equiprobable scheme? It is quite an interesting problem which is disscused to a certain depth here. In this paper, an event field, the class of a kind of a special subsets from the set of positive integers is taken, and the probability on the event firld is defined rationally. Then a probability field of such scheme is constructed.