第12卷第4期 1992年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 12 No. 4 Nov. 1992

# $k$—严格凸与$k$—$UR$空间*

南 朝 勋

(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

本文讨论$k$—严格凸Banach空间的各种性质，并证明，对于有限维空间，$k$—严格凸与$k$—$UR$是等价的. 另外若$X$、$Y$分别是$k_1$—严格凸、$k_2$—严格凸的Banach空间，$1<p<\infty$，则$(X\oplus Y)_p$为$(k_1+k_2-1)$—严格凸的Banach空间.

在[2]、[3]中对$k$—严格凸的Banach空间进行了讨论. 本文继续研究这方面的问题，首先让我们回忆一下有关定义与结果.

设$X$是Banach空间，$X^*$为$X$的共轭空间，记$S(X)=\{x\in X:\|x\|=1\}$.

**定义** 1[1] Banach空间$X$叫做$k$—严格凸的，如果对$X$中任意$k+1$个元素$x_1,\cdots,x_{k+1}$，当$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|=\|x_1\|+\cdots+\|x_{k+1}\|$时，$x_1,\cdots,x_{k+1}$是线性相关的.

显然$X$是$k$—严格凸的等价于，对$S(X)$中任$k+1$个元素$x_1,\cdots,x_{k+1}$，当$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|=k+1$时，$x_1,\cdots,x_{k+1}$是线性相关的；或者说$S(X)$中任一个元素都不是$S(X)$中$k+1$个线性无关元素的算术平均.

**定义** 2[5] Banach空间$X$叫做$k$—$UR$空间，如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，当$x_1,\cdots,x_{k+1}\in S(X)$，$\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|>k+1-\delta(\varepsilon)$时，有

$$A(x_1,\cdots,x_{k+1})=\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{k+1})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_1) & \cdots & f_k(x_{k+1})\end{matrix}\right| : f_i\in X^*,\ \|f_i\|\leqslant 1,\ i=1,\cdots,k\right\}<\varepsilon.$$

$X$叫做$Lk$—$UR$空间，如果对任意$\varepsilon>0$及任意$x\in S(X)$，存在$\delta(\varepsilon,x)>0$，当$x_1,\cdots,x_k\in S(X)$，$\|x+x_1+\cdots+x_k\|>k+1-\delta(\varepsilon,x)$时，$A(x,x_1,\cdots,x_k)<\varepsilon$.

在[2]，[3]中已经证明了

**定理** 1 Banach空间$X$的每个子空间上的线性连续泛函，在$X$上至多有$k$个线性无关的保范延拓的充要条件是$X^*$为$k$—严格凸的.

**定理** 2 $k$—$UR$空间和$Lk$—$UR$空间都是$k$—严格凸的.

刘证和庄亚栋在[4]中也得到上述结果.

下面证明对于有限维空间，$k$—严格凸性与$k$—$UR$是等价的.

**定理** 3 设$X$是有限维的Banach空间，$\dim X\geqslant k$，若$X$是$k$—严格凸的，则$X$是$k$—$UR$空间.

* 1990年11月21日收到.

**证明** 假设 $X$ 不是 $k-UR$ 空间. 由[7]中引理 5.2.31,存在 $k+1$ 个叙列 $\{x_1^n\},\cdots,\{x_{k+1}^n\}$,满足 $\|x_i^n\|\to 1,(n\to\infty)$, $i=1,\cdots,k+1$; $\|x_1^n+\cdots+x_{k+1}^n\|\to k+1$,并且 $A(x_1^n,\cdots,x_{k+1}^n)\not\to 0$. 因此有 $\varepsilon>0$ 及 $\{n\}$ 的子列,不妨认为是 $\{n\}$ 本身,使对一切 $n$,

$$A(x_1^n,\cdots,x_{k+1}^n)>\varepsilon. \tag{1}$$

由于 $X$ 是有限维的, $\{x_1^n\},\cdots,\{x_{k+1}^n\}$ 皆有收敛子列,不妨认为 $x_i^n\to x_i$, $(n\to\infty)$, $i=1,\cdots,k+1$. 显然 $\|x_i\|=1$, $i=1,\cdots,k+1$; $\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|=k+1$,并且由 $A(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 的连续性,从(1)式知

$$A(x_1,\cdots,x_{k+1})\geqslant\varepsilon. \tag{2}$$

因 $X$ 为 $k-$严格凸的,存在 $a_1,\cdots,a_{k+1}$,使

$$a_1x_1+\cdots+a_{k+1}x_{k+1}=0 \tag{3}$$

其中 $a_1,\cdots,a_{k+1}$ 不全为零,不妨假设 $a_1\neq 0$.

现在指出 $x_1$ 必定属于由 $x_2,\cdots,x_{k+1}$ 生成的仿射子空间 $[x_2,\cdots,x_{k+1}]$,从而 $x_1$ 与 $[x_2,\cdots,x_{k+1}]$ 的距离 $\mathrm{dist}(x_1,[x_2,\cdots,x_{k+1}])=0$.

事实上,从 $\left\|\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right\|=1$,可知存在 $f\in X^*$, $\|f\|=1$ 使 $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)=1$, 即 $f(x_1)+\cdots+f(x_{k+1})=k+1$,由于 $|f(x_i)|\leqslant 1$, $i=1,\cdots,k+1$,所以 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{k+1})=1$. 从(3)式得 $a_1+\cdots+a_{k+1}=f(a_1x_1+\cdots+a_{k+1}x_{k+1})=0$,因此有 $x_1=\frac{-a_2}{a_1}x_2+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_1}x_{k+1}$, $\frac{-a_2}{a_1}+\cdots+\frac{-a_{k+1}}{a_1}=1$. 这表明 $x_1\in[x_2,\cdots,x_{k+1}]$.

在[6]中,Bernal 与 Sullivan 证明对任意 Banach 空间 $X$ 中任意 $k+1$ 个范数为 1 的元素 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 有

$$d_1\cdot d_2\cdots d_k\leqslant A(x_1,\cdots,x_{k+1})\leqslant k^{k/2}d_1\cdot d_2\cdots d_k, \tag{4}$$

其中 $d_1=\mathrm{dist}(x_1,[x_2,\cdots,x_{k+1}])$, $d_2=\mathrm{dist}(x_2,[x_3,\cdots,x_{k+1}]),\cdots,d_k=\|x_k-x_{k+1}\|$.

对于上述 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 已经证明 $d_1=0$,所以由(4)式, $A(x_1,\cdots,x_{k+1})=0$,此与(2)式矛盾,因此 $X$ 是 $k-UR$ 空间.

**注** 由定理 3 的证明可知, $X$ 为 $k-$严格凸的充要条件是,当 $x_1,\cdots,x_{k+1}\in S(X)$ 且 $\|x_1+\cdots+x_{k+1}\|=k+1$ 时, $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 中必有一个元素是其余 $k$ 个元素的仿射线性组合.

**定理 4** 设 $X$ 为 $k-$严格凸的 Banach 空间, $M$ 为 $X$ 的自反子空间,则 $X/M$ 是 $k-$严格凸的.

**证明** 设 $[x_1],\cdots,[x_{k+1}]\in X/M$, $[x_i]=x_i+M$, $\|[x_i]\|=\inf\limits_{y\in M}\|x_i+y\|=1$, $i=1,\cdots,k+1$, 且 $\|[x_1]+\cdots+[x_{k+1}]\|=k+1$,因 $M$ 自反,对每个 $i$,存在 $x'_i\in[x_i]$ 使 $\|x'_i\|=\|[x_i]\|=1$, $[x'_i]=[x_i]$,显然 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}x'_i\in\sum\limits_{i=1}^{k+1}[x_i]$,并且

$$k+1=\|[x_1]+\cdots+[x_{k+1}]\|\leqslant\|x'_1+\cdots+x'_{k+1}\|\leqslant\|x'_1\|+\cdots+\|x'_{k+1}\|,$$

于是 $\|x'_1+\cdots+x'_{k+1}\|=k+1$,因 $X$ 是 $k-$严格凸的,所以 $x'_1,\cdots,x'_{k+1}$ 是线性相关的,即有不全为零的 $a_1,\cdots,a_{k+1}$ 使 $a_1x'_1+\cdots+a_{k+1}x'_{k+1}=0$,因此 $[a_1x'_1+\cdots+a_{k+1}x'_{k+1}]=0$. 但是 $[a_1x'_1+\cdots+a_{k+1}x'_{k+1}]=a_1[x'_1]+\cdots+a_{k+1}[x'_{k+1}]=a_1[x_1]+\cdots+a_{k+1}[x_{k+1}]$,所以 $[x_1],\cdots,[x_{k+1}]$ 为 $X/M$ 中的线性相关元素组,因此 $X/M$ 是 $k-$严格凸的.

如所周知，若 $X,Y$ 是两个严格凸的 Banach 空间，$1<p<\infty$，那么 $(X\oplus Y)_p=\{(x,y):x\in X, y\in Y, \|(x,y)\|=(\|x\|^p+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}\}$ 也是严格凸的 Banach 空间；此外若 $\{X_n\}$ 为一列严格凸的 Banach 空间，则 $l_p(X_n)=(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n)_p$ 也是严格凸的. 但是对于 $k$－严格凸性，$k\geqslant 2$，上述类似的结论并不成立.

**例** 设 $X=\{(x,y):x,y\in R, \|(x,y)\|=|x|+|y|\}$，$Y=X$，显然 $X,Y$ 是 2－严格凸的. 然而 $(X\oplus Y)_2$ 不是 2－严格凸的，因为在 $(X\oplus Y)_2$ 中取

$$z_1=((1,0),(0,1));\ z_2=((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,0));\ z_3=((0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$$

则 $\|z_1\|=\|z_2\|=\|z_3\|=\sqrt{2}$，$\|z_1+z_2+z_3\|=3\sqrt{2}$. 但 $z_1,z_2,z_3$ 不是线性相关的，因为从 $a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3=0$，有 $a_1+\frac{a_2}{2}=0$，$a_3+\frac{a_2}{2}=0$，$a_1+\frac{a_3}{2}=0$，$a_2+\frac{a_3}{2}=0$，所以 $a_1=a_2=a_3=0$.

**定理 5** 设 Banach 空间 $X,Y$ 分别是 $k_1$－严格凸的，$k_2$－严格凸，$1<p<\infty$，则 $(X\oplus Y)_p$ 是 $(k_1+k_2-1)$－严格凸的.

**证明** 设 $f\in(X\oplus Y)_p^*=(X^*\oplus Y^*)_q$，$f=(f_1,f_2)$，$f_1\in X^*$，$f_2\in Y^*$，这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 假设 $f\neq 0$，则 $f_1,f_2$ 不全为零，为证 $(X\oplus Y)_p$ 是 $(k_1+k_2-1)$ 严格凸的，由[3]中定理 1，只须证明 $f$ 至多在 $S((X\oplus Y)_p)$ 的 $k_1+k_2-1$ 个线性无关的元素上达到最大值. 为此假设有 $Z_1=(x_1,y_1),\cdots,Z_{k_1+k_2}=(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2})\in(X\oplus Y)_p$，$\|(x_i,y_i)\|=(\|x_i\|^p+\|y_i\|^p)^{\frac{1}{p}}=1$，$i=1,\cdots,k_1+k_2$，使

$$f(z_i)=\|f\|,\quad i=1,\cdots,k_1+k_2$$

因为

$$\|f\|=f(z_i)=f((x_i,y_i))=f_1(x_i)+f_2(y_i)\leqslant\|f_1\|\cdot\|x_i\|+\|f_2\|\cdot\|y_i\|$$
$$\leqslant(\|f_1\|^q+\|f_2\|^q)^{\frac{1}{q}}\cdot(\|x_i\|^p+\|y_i\|^p)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\cdot\|(x_i,y_i)\|=\|f\|.$$

所以

$$f_1(x_i)=\|f_1\|\cdot\|x_i\|,\ f_2(y_i)=\|f_2\|\cdot\|y_i\|.\ i=1,\cdots,k_1+k_2. \tag{5}$$

容易看出，如果有某个 $x_i\neq 0$（或 $y_i\neq 0$），则 $f_1\neq 0$（或 $f_i\neq 0$）.

情形 1 设 $f_1=0$，$f_2\neq 0$，如上对任意 $i$，$1\leqslant i\leqslant k_1+k_2$，$x_i=0$，$y_i\neq 0$. 于是从(5)式得到

$$f_2(\frac{y_i}{\|y_i\|})=\|f_2\|,\quad i=1,\cdots,k_1+k_2$$

因 $Y$ 是 $k_2$－严格凸的. 再由[3]中定理 1，$\frac{y_1}{\|y_1\|},\cdots,\frac{y_{k_1+k_2}}{\|y_{k_1+k_2}\|}$ 线性相关，从而 $y_1,\cdots,y_{k_1+k_2}$ 是线性相关的，因此 $z_1,\cdots,z_{k_1+k_2}$ 是线性相关的.

情形 2 设 $f_1\neq 0$，$f_2\neq 0$，于是对任意 $1\leqslant i\leqslant k_1+k_2$，从(5)式得到

$$f_1(\frac{x_i}{\|x_i\|})=\|f_1\|,\quad f_2(\frac{y_i}{\|y_i\|})=\|f_2\|.$$

因 $X$ 是 $k_1$－严格凸，$Y$ 是 $k_2$－严格，所以 $x_1,\cdots,x_{k_1+k_2}$ 中任何 $k_1$ 个元素是线性相关的，$y_1,\cdots,y_{k_1+k_2}$ 中任何 $k_2$ 个元素是线性相关的，由代数学知 $z_1(x_1,y_1),\cdots,z_{k_1+k_2}=(x_{k_1+k_2},y_{k_1+k_2})$ 是线性相关的. 因此 $(X\oplus Y)_p$ 是 $(k_1+k_2-1)$－严格凸的.

**推论** 设 $\{X_n\}$ 为一列 Banach 空间，$X_1$ 为 $k$－严格凸的，$X_n$ 为严格凸的，$n=2,3,\cdots$，

则 $l_p(X_n)$ 为 $k$—严格凸的，这里 $1<p<\infty$.

**证明** 记 $Y=(\sum_{n=2}^{\infty}\oplus X_n)_p$，则 $Y$ 是严格凸的(即 1—严格凸的). 由定理 5 $(X_1\oplus Y)_p=(X_1\oplus(\sum_{n=2}^{\infty}\oplus X_n)_p)_p$ 是 $k$—严格凸的. 但是 $(X_1\oplus Y)_p$ 与 $l_p(X_n)=(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n)_p$ 等距，所以 $l_p(X_n)$ 是 $k$—严格凸的.

最后指出[4]中的一个错误.

在[4]中通过一个例子说明完全 2—凸空间未必是 2—严格凸的. 这个例子如下

设 $E=(l_2,\|\cdot\|)$，这里对于 $x=(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in l_2$ 规定 $\|x\|^2=[|a_1|+(a_2^2+a_3^2+\cdots)^{\frac{1}{2}}]^2+[(\frac{a_2}{2})^2+\cdots+(\frac{a_n}{n})^2+\cdots]^2$. 作者证明在 $E$ 中存在

$$x_1=(1,0,\cdots),\ x_2=(0,a,0,\cdots),\ x_3(0,b,c,0,\cdots),$$

其中 $a,b,c\neq 0$，使 $\|x_1\|=\|x_2\|=\|x_3\|=1$，$\|x_1+x_2+x_3\|=3$，但 $x_1,x_2,x_3$ 是线性无关的，由此判定完全 2—凸空间未必是 2—严格凸的.

上述论断是错误的. 因为当 $\alpha\neq 0,1,x\neq(a,0,\cdots),a\neq 0$ 时，$\|\alpha x\|\neq|\alpha|\|x\|$，因此 $\|\cdot\|$ 不是范数，当然 $E$ 更不是完全 2—凸空间.

事实上，完全 2—凸空间一定是 2—严格凸的，因为容易证明完全 2—凸空间是严格凸的.

## 参 考 文 献


[1] Istratescu, V. I., *Strict convexity and complex strict convexity*, New York and Basel (1984).

[2] 南朝勋，Taylor—Fougel 定理的一个推广，安徽师大学报，1989 年第一期，7—11.

[3] 南朝勋，王建华，$k$—严格凸性与 $k$—光滑性，数学年刊，11A:3 (1990)，321—324.

[4] Liu Zheng and Zhuang Yadong, *K—Rotund complex normed spaces*, J. Math. Anal. Appl. 146(1990), 540—545.

[5] Sullivan, F., *A generalization of uniformly rotund Banach spaces*, Canad J. Math. 31(1979), 628—646.

[6] Bernal, J. and Sullivan, F., *Multi—dimensional volumes, supper reflexivity and normal structure in Banach spaces*, Illinois J. Math., 27(1983), 501—513.

[7] 俞鑫泰，Banach 空间几何理论，华东师大出版社(1986).


# $k$-Strict Convexity and $k-UR$ Spaces


*Nan Chaoxun*

(Dept. Math., Anhui Normal University, Wuhu)


## Abstract


The results of this paper are as follow

(1) Let $X$ be a finite dimensional Banach space and $\dim X\geq k$. If $X$ is $k$-strictly convex, then $X$ is $k$-uniformly rotund.

(2) Let $X$ be $k_1$-strictly convex and let $Y$ be $k_2$-strictly convex. Then $(X\oplus Y)_p,(1<p<\infty)$,is $(k_1+k_2-1)$-strictly convex.