第12卷第4期
1992年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 4
Nov. 1992

L—fuzzy 拓扑空间若干紧性概念的等价性*

孟培源　　周武能
(湖北咸宁师专,437005)　(湖北郧阳师专,441900)

一　引　言

本文对文献[1]介绍的超紧性、良紧性、强 F 紧性及 F 紧性[2,3,4,5]在弱诱导空间[6,7]与(强)Hausdorff 空间[1,6]的等价性进行了系统的研究,得到了较为整齐的结果. 在此基础上,构造了一个满层 Hausdorff 良紧而非强 Hausdorff 非超紧的反例,该反例结合已得结论,完满地回答了文[1]中提出的两个公开问题 5.4.10 和 6.4.31. 此外,本文还给出了 Hausdorff 良紧空间是超紧的若干条件.

本文 X 恒表非空分明集,L 是具逆序对合对应"$'$"的完全分配格,0 与 1 根据上下文分别表示 L 或 L^X 中的最小元与最大元. 以 $M(L)$,$M^*(L^X)$分别表 L 与 L^X 中非零并既约元的全体,$\forall\ a\in L$,以 $\beta(a)$表 a 在 L 中的最大极小集[1],令 $\beta^*(a)=\beta(a)\cap M(L)$,则 $\beta^*(a)$是 a 在 L 中的极小集,称为 a 的标准极小集[1],以$[a]$表在 X 上各点取常值 a 的不分明集. 设 $A\in L^X$,记 $A_{[a]}=\{x\in X:A(x)\geqslant a\}$,$\iota_a(A)=\{x\in X:A(x)\nleqslant a\}$. 设$(L^X,\delta)$是 L—不分明拓扑空间,简记为 L—fts,则以 $\varphi_0(\delta)=\{\iota_r(A)\,|\,A\in\delta,r$ 是 L 中小于 1 的素元$\}$为子基生成 X 上一个分明拓扑[1],记该分明拓扑为 $\iota_L(\delta)$,又 δ 中全体分明开集的承集之族构成 X 上一个分明拓扑[6],记为$[\delta]$. 设$(X,\mathscr{T})$是分明拓扑空间,则 X 上全体下半连续函数之集是 L^X 上的 L—不分明拓扑,记为 $\omega_L(\mathscr{T})$,称$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$为$(X,\mathscr{T})$的诱导空间[6]. $\forall\ x_a\in M^*(L^X)$,以 $\eta(x_a)$记 x_a 的远域之族. 文中未加说明的记号和概念均与[1]相同.

二　弱诱导空间若干紧性的等价性

定义 2.1[1,6]　L—fts(L^X,δ)称为弱诱导的,若$\forall\ A\in\delta$,$\forall\ r\in L$,$\chi_{\iota_r}(A)\in\delta$.

定义 2.2[8]　设(L^X,δ)是 L—fts,$A\in L^X$,$a\in M(L)$,若对 A 的任一 a—远域族 Φ 及任一 $x_a\leqslant A$,有分明闭集 $P\in\eta(x_a)$,使 Φ 为 $A\wedge P'$的 a^-—远域族,则称 A 具有 a—LN 性质,若对每一 $a\in M(L)$,A 都具 a—LN 性质,则称 A 具 LN 性质,当 $A=1$ 时,称(L^X,δ)具相应性质.

若(L^X,δ)是良紧空间,则(L^X,δ)具有 LN 性质[8]. 事实上,设 Φ 是(L^X,δ)的 a—远域族,$(a\in M(L))$,由良紧性易知 Φ 为(L^X,δ)的 a^-—远域族,从而 Φ 为任一 $P\in L^X$ 的 a^-—远域族,故(L^X,δ)具 LN 性质.

* 1990年12月17日收到.

引理 2.3[8] 设(L^X,δ)是弱诱导空间，$A\in L^X$，则 A 必具 LN 性质.

证明 设 $\alpha\in M(L)$，Φ 为 A 的 α—远域族，则$\forall\ x_\alpha\leqslant A$，$\exists\ F\in\Phi$，使 $F\in\eta(x_\alpha)$，设 $F(x)=\gamma\ngeq\alpha$，则可取 $t\in\beta^*(\alpha)$，使 $\gamma\ngeq t$，令 $P=\chi_{F[t]}$，则 P 是分明的，且由于 $P'=\chi_{(F[t])'}=\chi_{\iota_t(F')}\in\delta$ 知 $P\in\delta'$. 下面证明(a) $P\in\eta(x_\alpha)$，(b) Φ 为 $P'\wedge A$ 的 t—远域族，从而是 α^-—远域族. 事实上，对(a)， 由 $F(x)=\gamma\ngeq t$，故 $x\notin F_{[t]}$，从而 $P(x)=0$，即 $P\in\eta(x_\alpha)$成立；对(b)，$\forall\ y_t\leqslant P'\wedge A$，有 $y_t\leqslant P'$，$y_t\leqslant A$. 由 $y_t\in P'$及 P 分明得 $P(y)=0$，即 $y\notin F_{[t]}$ 或 $F(y)\ngeq t$，于是 $F\in\eta(y_t)$，又 $F\in\Phi$，故 Φ 确为 $P'\wedge A$ 的 t—远域族.

引理 2.4[9] 设(L^X,δ)是 L—fts，则(L^X,δ)是 F 紧空间当且仅当(L^X,δ)的任一 α^-—远域族有有限子族是(L^X,δ)的 α^-—远域族.

引理 2.5[5] 设(L^X,δ)是 L—fts，Φ 是 $A_i\in L^X(i=1,\cdots,n)$的 α^-—远域族， 则 Φ 也是 $A=\bigvee\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的 α^-—远域族.

定理 2.6 设(L^X,δ)具 LN 性质，则(L^X,δ)中良紧性、强 F 紧性、F 紧性等价.

证明 只须证明：若(L^X,δ)是具 LN 性质的 F 紧空间，则(L^X,δ)是良紧的. 设 Φ 是(L^X,δ)的任一 α—远域族，由良紧性的定义[1]及引理 2.4，只须证明 Φ 是(L^X,δ)的 α^-—远域族即可！由已知，$\forall\ x\in X$，存在分明闭集 $P_x\in\eta(x_\alpha)$，使得 Φ 是 P'_x的 α^-—远域族，取 $r\in\beta^*(\alpha)$， 则由 $P_x(x)=0$ 有 $P_x\in\eta(x_r)$. 令 $\Phi=\{P_x\,|\,x\in X\}$，则 Φ 是(L^X,δ)的 α^-—远域族，由引理 2.4，存在 $x_i\in X(i=1,\cdots,n)$，使$\{P_{x_1}\cdots,P_{x_n}\}$是$(L^X,\delta)$的 α^-—远域族. 注意到 $P_{x_i}(i=1,\cdots,n)$是分明集，从而 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}P_{x_i}=0$，所以 $\bigvee\limits_{i=1}^{n}P'_{x_i}=1$，据引理 2.5，$\Phi$ 是 $\bigvee\limits_{i=1}^{n}P'_{x_i}=1$ 即(L^X,δ)的 α^-—远域族.

引理 2.7 设(L^X,δ)是弱诱导的良紧空间，则(L^X,δ)是超紧空间.

引理 2.7 可由[1]中定理 6.6.5，定理 6.6.4(ii)及超紧性的定义[1]直接得到.

结合引理 2.3，定理 2.6 及引理 2.7 即得

定理 2.8 设(L^X,δ)是弱诱导空间，则(L^X,δ)中超紧性、良紧性、强 F 紧性，F 紧性等价.

三 （强）Hausdorff 空间若干紧性的等价性

定义 3.1[3] L—fts(L^X,δ)中两个有相同定向集的分子网 $S=\{s(n):n\in D\}$，$T=\{t(n):n\in D\}$称为相似的，若$\forall\ n\in D$，$s(n)$与 $t(n)$有相同的承点.

定义 3.2[1] 设(L^X,δ)是 L—fts，如果$\forall\ x_\lambda,y_\mu\in M^*(L^X)$，当 $x\neq y$ 是有 $P\in\eta(x_\lambda)$与 $Q\in\eta(y_\mu)$使 $P\vee Q=1$，则称(L^X,δ)为 Hausdorff 空间； 如果$\forall\ x_\lambda,y_\mu\in L^X$，$\lambda,\mu\in L$，当 $x\neq y$ 时，有 $P\in\eta(x_\lambda)$，$Q\in\eta(y_\mu)$，使$\forall\ x\in X$，$P(x)=1$ 或 $Q(x)=1$，则称(L^X,δ)为强 Hausdorff 空间. 分别称 P 与 Q 为 x_λ 与 y_μ 的分离远域.

引理 3.3 设 S 是 Husdorff 强 F 紧空间(L^X,δ)中的 α—网，则$\forall\ c\in\beta^*(\alpha)$，与 S 相似的常值 c—网有承点相同的一聚点.

证明 设 $S=\{x^n_{\lambda_n}:n\in D\}$，$\alpha,\lambda_n\in M(L)$，$x^n\in X$，$n\in D$. $c\in\beta^*(\alpha)$，与 S 相似的常值 c—网为 $S_c=\{x^n_c:n\in D\}$，因为(L^X,δ)是强 F 紧空间，所以 S_c 有 c—聚点，设为 x_c，S_c 收敛于 x_c 的子网记为 $T_c=\{x^{n_k}_c:k\in E\subset D\}$，$\forall\ d\in\beta^*(\alpha)$，$S_d=\{x^n_d:n\in D\}$是相似于 S 的常值 d—网，$T_d=\{x^{n_k}_d:k\in E\subset D\}$

是相似于 T_c 的 S_t 的子网，则 T_t 有 d—聚点 y_t 且 $y=x$. 事实上，若 $y\neq x$，由 (L^X,δ) 的 Hausdorff 性，∃ $P_0\in\eta(x_c)$，$Q_0\in\eta(y_t)$，使 $P_0\vee Q_0=1$. 因为 T_c 收敛于 x_c，所以∃ $K_0\in E$，当 $k\in E$ 且 $k\geqslant K_0$ 时，$x_c^{n_k}\not\leqslant P_0$，又 T_t 聚于 y_t，故对上述 K_0，∃ $k_0\in E$，$k_0\geqslant K_0$，使 $x_t^{n_{k_0}}\not\leqslant Q_0$，从而 $x_\alpha^{n_{k_0}}\not\leqslant P_0$，$x_\alpha^{n_{k_0}}\not\leqslant Q_0$，故 $P_0(x^{n_{k_0}})\vee Q_0(x^{n_{k_0}})\ngeqslant\alpha$，这与 $P_0\vee Q_0=1$ 矛盾，所以 T_t 从而 S_t 聚于 x_t.

定理 3.4　设 (L^X,δ) 是 Hausdorff 空间，则 (L^X,δ) 的良紧性，强 F 紧性，F 紧性等价.

证明　由于良紧⇒强 F 紧⇒F 紧，且据[1]中定理 6.4.29 的证明知，Hausdorff F 紧空间必是强 F 紧的，从而只须证明 Hausdorff 强 F 紧空间是良紧的即可. 设 $S=\{x_{\lambda_n}^n:n\in D\}$ 是 (L^X,δ) 中任一 α—网，$\alpha,\lambda_n\in M(L)$，$x^n\in X$，$n\in D$，由引理 3.3 知，∃ $x\in X$，使∀ $r\in\beta^*(\alpha)$，与 S 相似的常值 r—网 $S_r=\{x_r^n:n\in D\}$ 聚于 x_r，则 x_α 是 S 的聚点. 事实上，若不然，则∃ $P\in\eta(x_\alpha)$ 及 $N_0\in D$，∀ $n\geqslant N_0$，有 $x_{\lambda_n}^n\leqslant P$. 由极小集的性质，可取 $r\in\beta^*(\alpha)$，使 $P\in\eta(x_r)$. 而 S 为 α—网，故∃ $N_1\in D$，当 $n\geqslant N_1$ 时有 $\lambda_n\geqslant r$. 取 $N\in D$，使 $N\geqslant N_0$，$N\geqslant N_1$，则当 $n\geqslant N$ 时 $x_r^n\leqslant x_{\lambda_n}^n\leqslant P$，这与 S_r 以 x_r 为聚点矛盾. 因此 S 聚于 x_α，即 (L^X,δ) 是良紧空间.

由[1]中定理 6.6.8，定理 6.6.5 与定理 6.6.4(ii)有

引理 3.5　设 (L^X,δ) 是良紧的强 Hausdorff 空间，则 (L^X,δ) 是超紧空间.

由本文的定理 3.4 及引理 3.5 直接得到

定理 3.6　L—不分明强 Hausdorff 空间中超紧性，良紧性，强 F 紧性，F 紧性等价.

定理 3.6 是[1]中定理 6.4.29 的推广.

四 反　例

定理 2.6，2.8 及 3.4，3.6 给出了整齐而又较理想的结果. 下面的反例表明，在本文所涉及到的概念的意义下，这些结果不能再加以改进.

例　设 $X=\{x^0,x^1,y^1,y^2,\cdots\}$，$L=\{0,1,a_0,a_1\}$ 是菱形格，$a'_0=a_1$，则 L 是具逆序对合对应的完全分配格，$M(L)=\{a_0,a_1\}$，$M^*(L^X)=\{x_{a_0}^0,x_{a_0}^1,y_{a_0}^1,y_{a_0}^2,\cdots,x_{a_1}^0,x_{a_1}^1,y_{a_1}^1,y_{a_1}^2,\cdots\}$. 集族 $\{A,B,C_i(n),D_i(n)\mid i=0,1;n=1,2,\cdots\}\subset L^X$ 定义如下：

$$A(z)=\begin{cases}a_0,\ z=x^0,\\1,\ z\in X\backslash\{x^0\},\end{cases}\qquad B(z)=\begin{cases}a_1,\ z=x^1,\\1,\ z\in X\backslash\{x^1\},\end{cases}$$

$$\forall\ n\in\mathbf{N};i,j\in\{0,1\},i\neq j,$$

$$C_i(n)(z)=\begin{cases}1,\ z\in\{x^i\}\cup\{y^1,\cdots,y^{n-1}\},\\a_i,\ z\in\{x^j\}\cup\{y^n,\cdots\},\end{cases}\qquad D_i(n)(z)=\begin{cases}a_i,\ z=y^n,\\1,\ z\in X\backslash\{y^n\}.\end{cases}$$

令 $\mathscr{B}=\{1,A,B,C_i(n),D_i(n)\mid i=0,1;n=1,2,\cdots\}\subset L^X$，容易验证，$\mathscr{B}$ 中任意两元素的并还是 $\mathscr{B}$ 中的元素，从而 $\mathscr{B}$ 对有限并封闭，$\wedge\mathscr{B}\leqslant A\wedge B\wedge C_0(1)\wedge C_1(1)=0$，设 $\eta=\{\wedge\mathscr{B}_0:\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}\}$，则 η 是以 $\mathscr{B}$ 为闭基生成的 L^X 上的余拓扑，且 (L^X,η) 具有如下性质：

i)　(L^X,η) 是满层空间：$A\wedge C_0(1)=[a_0]$，$B\wedge C_1(1)=[a_1]$.

ii)　(L^X,η) 是 Hausdorff 空间.

事实上，L^X 的非零并既约元可分为八类：$x_{a_0}^0,x_{a_1}^0,x_{a_0}^1,x_{a_1}^1,y_{a_0}^n,y_{a_1}^n$，记 $i'=\{0,1\}\backslash\{i\}$，$j'=\{0,1\}\backslash\{z\}$，则其中承点不同的点对只有 13 类，现将各类点对及其相应的分离远域列出如下：

$$\begin{cases} x_{a_0}^0: C_1(1) \\ x_{a_1}^1: C_0(1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_0}^0: C_1(1) \\ x_{a_1}^1: B \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^0: A \\ x_{a_1}^1: C_0(1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^0: A \\ x_{a_0}^1: B \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{a_i}^m: D_{i'}(m) \\ y_{a_j}^n: D_{j'}(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_0}^0: C_1(n+1) \\ y_{a_0}^n: D_1(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^1: C_0(n+1) \\ y_{a_1}^n: D_0(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^0: A \\ y_{a_0}^n: D_1(n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{a_0}^1: B \\ y_{a_1}^n: D_0(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_0}^0: C_1(n+1) \\ y_{a_1}^n: D_0(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^0: A \\ y_{a_1}^n: D_0(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_0}^1: B \\ y_{a_0}^n: D_1(n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{a_1}^1: C_0(n+1) \\ y_{a_0}^n: D_1(n) \end{cases}$$

故(L^X,η)是 Hausdorff 空间.

iii) (L^X,η)是良紧空间(从而具 LN 性质).

由良紧性的 Alexander 子基引理[1],只须验证,若 $\Phi\subset\mathscr{B}$,且 Φ 是(L^X,η)的 $a_0(a_1)$—远域族时,有 Φ 的有限子族 Φ,使 Φ 是(L^X,η)的 $a_0^-(a_1^-)$—远域族即可!

设 $\Phi\subset\mathscr{B}$ 是(L^X,η)的任一 a_0—远域族,则对 $x_{a_0}^0\in M^*(L^X)$, 必有 $n_0\in N$ 使 $C_1(n_0)\in\Phi$,$C_1(n_0)\in\eta(x_{a_0}^0)$,由 $C_1(n_0)$的定义,当 $n\geqslant n_0$ 时,$C_1(n_0)\in\eta(y_{a_0}^n)$. 再由 Φ 是(L^X,η)的 a_0—远域族,$\exists\ P_k\in\Phi$,$Q\in\Phi$ 使 $P_k\in\eta(y_{a_0}^k)$,$Q\in\eta(x_{a_0}^1)$,$k\in\{1,\cdots,n_0-1\}$,令 $\psi=\{C_1(n_0)\}\cup\{P_k\}_{k=1}^{n_0-1}\cup\{Q\}$,则 Φ 是 Φ 的有限子族,且 ψ 是(L^X,η)的有限 a_0—远域族. 而显然 $\beta^*(a_0)=\{a_0\}$,故 ψ 是(L^X,η)的 a_0^-—远域族. 同理可证(L^X,η)的包含于 $\mathscr{B}$ 中的任一 a_1—远域族有有限子族是其 a_1^-—远域族. 故(L^X,η)是良紧空间.

iv) (L^X,η)不是强 Hausdorff 空间.

取点对 x_{a0}^0,x_{a1}^1,设 $P\in\eta(x_{a0}^0)$,$Q\in\eta(x_{a1}^1)$,$P=\wedge\mathscr{B}_0$,$Q=\wedge\mathscr{B}_1$,$\mathscr{B}_i\subset\mathscr{B}(i=0,1)$. 则必有 $m,n\in N$ 使 $C_1(m)\in\mathscr{B}_0$,$C_0(n)\in\mathscr{B}_1$,$P\leqslant C_1(m)$,$Q\leqslant C_0(n)$,取 $k\geqslant\max\{m,n\}$,则 $P(y^k)\leqslant C_1(m)(y^k)=a_1\neq1$,$Q(y^k)\leqslant C_0(n)\ (y^k)=a_0\neq1$,故$(L^X,\eta)$不是强 Hausdorff 的.

v) (L^X,η)不是弱诱导空间.

取 $A\in\eta$,$a_1\in L$,$A_{[a_1]}=\{x\in X:A(x)\geqslant a_1\}=\{x^1,y^1,y^2,\cdots\}$,$\chi_{A_{[a_1]}}(z)=\begin{cases}0, & z=x^0,\\ 1, & z\in X\backslash\{x^0\},\end{cases}$ 假设 $\chi_{A_{[a_1]}}\in\eta$,即 $\chi_{A_{[a_1]}}=\wedge\mathscr{B}_0$,$\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$,则 $A\in\mathscr{B}_0$,且$\exists\ n\in N$,使 $C_1(n)\in\mathscr{B}_0$,当 $m\geqslant n$ 时,$(\wedge\mathscr{B}_0)(y^m)\leqslant(A\wedge C_1(n))(y^m)=a_1\neq1$,但 $\chi_{A_{[a_1]}}(y^m)=1$ 矛盾!所以 $X_{A_{[a_1]}}\notin\eta$. 故(L^X,η)不是弱诱导空间.(其实,由性质 iii),vi)及引理 2.7 知,(L^X,η)不是弱诱导空间.)

vi) (L^X,η)不是超紧空间.

取 $\mathscr{U}=\{\iota_{a_0}(A')\}\cup\{\iota_{a_1}(B')\}\cup\{\iota_{a_0}(D'_0(n))\,|\,n=1,2,\cdots\}=\{\{x^0\}\}\cup\{\{x^1\}\}\cup\{\{y^n\}\,|\,n=1,2,\cdots\}$,可见 $\mathscr{U}$ 是 X 的单点开复盖,这说明$(X,\iota_L(\eta'))$是散空间. 故(L^X,η)不是超紧空间

上述性质 ii),iv)否定地回答了[1]中的问题 5.4.10;性质 ii),iii),vi)否定地回答了[1]中的问题 6.4.31.

五 Hausdorff 良紧空间是超紧的条件

设(L^X,δ)是 L—fts,记 δ_c 为以 $\delta\cup\{[\lambda]:\lambda\in L\}$为子基生成的 L^X 上的 L—不分明拓扑,称(L^X,δ_c)为(L^X,δ)的满层化[11].

引理 5.1[11]　$A\in L^X$ 是(L^X,δ)的良紧子集当且仅当 A 为(L^X,δ_c)的良紧子集.

引理 5.2[1]　设(L^X,δ)是满层的 Hausdorff 空间,A 是(L^X,δ)中的良紧集,则 A 是闭集.

引理 5.3　设(L^X,δ)是 Hausdorff 空间,则$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$是强 Hausdorff 空间.

证明　因为 $\delta\subset\omega_L(\iota_L(\delta))$,从而由已知,$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$也是 Hausdorff 空间,　因此$(X,\iota_L(\delta))$是分明 T_2 空间. 又$[\omega_L(\iota_L(\delta))]=\iota_L(\omega_L(\iota_L(\delta)))=\iota_L(\delta)$,可见$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$的底空间$(X,[\omega_L(\iota_L(\delta))])$是 T_2 空间,结合[1]中定理 6.6.6 知$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$是强 Hausdorff 空间.

定理 5.4　设(L^X,δ)是良紧的 Hausdorff 空间,则以下各条等价:

i) (L^X,δ)是超紧空间;ii)[10] (L^X,δ_c)是弱诱异空间(iii) $\delta_c=\omega_\iota(l_L(\delta))$;iv)[10] (L^X,δ_c)是强 Hausdorff 空间;v) (L^X,δ_c)是超紧空间.

证明　i)⇒ii),与定义 2.1 等价,只须对任一闭集 $P\in\delta_c$ 及任一 $r\in L$,证明 $\chi_{P_{[r]}}\in\delta'_c$. 又因 L 中任一元都能表示为分子之并,由 $P_{[r]}$ 的构造我们还可设 r 是分子,即 $r\in M(L)$. 由 δ_c 的定义,设

$$P=\bigwedge_{t\in T}\{Q_t\vee[\lambda_t]:Q_t\in\delta',\lambda_t\in L\}$$

则

$$\begin{aligned}P_{[r]}&=\{x\in X:P(x)\geqslant r\}=\{x\in X:(\bigwedge_{t\in T}(Q_t\vee[\lambda_t]))(x)\geqslant r\}\\&=\bigcap_{t\in T}\{x\in X:Q_t(x)\vee[\lambda_t](x)\geqslant r\}\\&=\bigcap_{t\in T}(\{x\in X:Q_t(x)\geqslant r\}\cup\{x\in X:[\lambda_t](x)\geqslant r\})=\bigcap_{t\in T}(Q_{t[r]}\cup[\lambda_t]_{[r]})\\\chi_{P_{[r]}}&=\bigwedge_{t\in T}(\chi_{Q_{t[r]}}\vee\chi_{[\lambda_t]_{[r]}}).\end{aligned}$$

所以只须证,$\forall\ Q\in\delta',\lambda\in L,r\in M(L)$有 $\chi_{Q_{[r]}}\in\delta'_c,\chi_{[\lambda]_{[r]}}\in\delta'_c$即可. 现 $Q\in\delta'\subset\omega_L(\iota_L(\delta)))'$,而$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$是诱导空间[6],所以 $\chi_{Q_{[r]}}\in(\omega_L(\iota_L(\delta)))'$,由 i)知,$(X,\iota_L(\delta))$是紧空间,从而$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$是良紧空间,又良紧性闭遗传,所以 $\chi_{Q_{[r]}}$ 是$(L^X,\omega_L(\iota_L(\delta)))$的良紧集. 易知 δ_c 是细于 δ 的最粗的满层拓扑. 从而 $\delta\subset\delta_c\subset\omega_L(\iota_L(\delta))$. 所以 $\chi_{Q_{[r]}}$ 是满层 Hausdorff 良紧空间(L^X,δ_c)的良紧集,据引理 5.2 知 $\chi_{Q_{[r]}}\in\delta'_c$. 此外$[\lambda]_{[r]}=\begin{cases}\varnothing, & \lambda\ngeqslant r,\\X, & \lambda\geqslant r,\end{cases}$　所以 $\chi_{[\lambda]_{[r]}}=\begin{cases}0, & \lambda\ngeqslant r,\\1, & \lambda\geqslant r,\end{cases}$ 故 $\chi_{[\lambda]_{[r]}}\in\delta'_c$.

ii)⇒iii)　由 ii),(L^X,δ_c)是诱导空间,而 $\delta_c\subset\omega_L(\iota_L(\delta))\subset\omega_L(\iota_L(\delta_c))=\delta_c$,所以 $\delta_c=\omega_L(\iota_L(\delta))$.

iii)⇒iv)　结合引理 5.3 及 iii)即得.

iv)⇒v)　结合引理 5.1,iv)及引理 3.5 即得.

v)⇒i)　因为 $\delta\subset\delta_c$,而(L^X,δ_c)是超紧空间,所以(L^X,δ)是超紧空间.

参 考 文 献

[1]　王国俊,L—fuzzy 拓扑空间论,陕西师范大学出版社,西安,1988 年 7 月.

[2]　R. Lowen, *A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces*, JMAA, 64(1978), 446—454.

[3]　Wang Guojun, *A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets*, ibid, 94(1983), 1—23.

[4]　彭育威,L—fuzzy 拓扑空间的良紧性,数学学报,29(1986),555—558.

[5]　Zhao Dongheng, *The N—compactness in L—fuzzy topological spaces*, JMAA, 128(1987), 64—79.

[6] 刘应明,罗懋康，诱导空间与不分明 Stone—Čech 紧化，中国科学，1987，4:360—368.
[7] H. W. Martin, *Weakly induce fuzzy topological spaces*, JMAA, 78(1980), 634—639.
[8] 徐罗山，中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会第五届年会论文选集，1990，242—244.
[9] 徐剑军，L—fuzzy 拓扑空间中的 F 紧性，数学季刊，1990 年第 3 期.
[10] 彭育威，Hausdorff 良紧空间是超紧的充要条件，数学研究与评论，12:4(1992).
[11] 徐晓泉，良紧集的层次结构与不分明 Wallace 定理，科学通报，14(1989)，1052—1054.

On the Equivalece of Some Compactness Notions in L-fuzzy Topological Spaces

Mong Peiyuan

(Xianning Normal College, Hubei,437005)

Zhou Wuneng

(Yunyang Normal College, Hubei, 441900)

Abstract

In this paper, the equivalent of ultra-fuzzy compactness, N-compactness, strong fuzzy compactness and fuzzy compactness in weakly induced spaces and (strong) Hausdirff spaces are discussed. A counterexample was given in which we defined an L-fuzzy topological space which is fully stratified, Hausdorff and N-compact but neither strong Hausdorff nor ultra-fuzzy compact, hence solves two open problems. Finally some conditions are given for a Hausdorff N-compact space to be an ultra-fuzzy compact space.