第13卷第1期
1993年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 1
Feb. 1993

一个离散种群模型的稳定性判据*

段 魁 臣
(新疆大学数学系,乌鲁木齐 830046)

定理 假定 $\bar{x}$ 是 $x_{t+1}=g(x_t)$ 的满足 $(\bar{x}-x)(g(x)-x)>0,(x\neq\bar{x})$ 的平衡点,且在 $\bar{x}$ 的邻域内有

$$g(g(x))-x=A_1(x-\bar{x})+\cdots+A_n(x-\bar{x})^n+\cdots,$$

那么:(1) 若 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=0$ $A_n\neq0$ 则 n 为奇数;(2) 若(1)成立,则 $\bar{x}$ 渐近稳定的充要条件是 $A_{2k+1}<0$ $(n=2k+1)$;(3) $\bar{x}$ 稳定但不吸引的充要条件是所有 $A_i=0$ $(i=1,2,\cdots)$.

证明 (1) 若不然,设 $n=2k$ 为偶数,由 $g(g(x))-x=A_{2k}(x-\bar{x})^{2k}+\cdots$ 知 $g(g(x))-x$ 在 $\bar{x}$ 充分小的邻域中不变号. 但由文[1]知条件 $(\bar{x}-x)[g(x)-x]>0(x\neq\bar{x})$ 推出 $(\bar{x}-x)(g(g(x))-x)>0(x\neq\bar{x})$ 这与 $g(g(x))-x$ 不变号矛盾,故 n 必为奇数. (下边记 $g^2(x)=g(g(x))$, $g^3(x)=(g(g(x)))\cdots)$

(2) 充分性. 若 $A_{2k+1}<0$,在 $\bar{x}$ 的充分小邻域中取 $x_0<\bar{x}$,由条件 $(\bar{x}-x_0)(g(x_0)-x_0)>0$ 知 $g(x_0)>x_0$. 根据文[1]推出 $g^2(x_0)>g(x_0)$,一般地有 $g^n(x_0)>g^{n-1}(x_0)$. 于是轨道 $\{g^n(x_0)\}$ 是递增数列,又 $g^n(x_0)<\bar{x}$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}g^n(x_0)=x^+$ 存在. 显然 x^* 是 $g(x)$ 映射下不动点,但 $\bar{x}$ 是此区间上唯一不动点,故 $x^*=\bar{x}$,即 $\bar{x}$ 渐近稳定.

必要性. 若 $A^{2k+1}>0$,则 $\{g^n(x_0)\}$ 为递减数列,故远离 $\bar{x}$,$\bar{x}$ 不稳定.

(3) 注意到此时 $g^2(x)\equiv x$ 即除掉 $\bar{x}$ 外其它所有点都是二周期解. 定理证毕.

很容易算出:$A_1=[g'(x)]^2-1$,

$$A_2=\frac{1}{2}[g''(\bar{x})g'(\bar{x})(g'(\bar{x})+1],$$

$$A_3=\frac{1}{6}\{g'(\bar{x})g'''(\bar{x})+3g'(\bar{x})[g''(\bar{x})]^2+[g'(\bar{x})]^3g''(\bar{x})\}.$$

例[2] 若 $g(x)=\dfrac{cx}{(1+ax)^b}(a>0,b>0,c=(1+a)^b)$,则其平衡点 $\bar{x}=1$. 当 $ab<2(1+a)$ 时,$A_1=\dfrac{(1+a-ab)^2}{(1+a)^2}-1<0$ 知 $\bar{x}=1$ 渐近稳定;当 $ab=2(1+a)$ 时,$A_1=0$,而 $A_3=\dfrac{-2(a^2+3a+1)}{3(1+a)^3}<0$,故亦渐近稳定.

参考文献

[1] 滕志东,段魁臣, 新疆大学学报 1(1989).

[2] Hassell, M. P., J Anim. Ecol., 44: 263—269.

* 1991年6月14日收到. 该文由国家自然科学基金资助.