第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

多变量 Toeplitz 算子的联合谱与联合数值域*

曹广福 邹承祖
(哈尔滨建筑工程学院,150006) (吉林大学,长春 130023)

§1 若干记号与定义

一般地,我们用 B^n 表示 C^n 中单位球,S^n 表示 B^n 的边界;对 $0<p\leqslant\infty$,$H^p(S^n)$表示 S^n 上的 Hardy 空间,若 $\varphi\in L^\infty(S^n)$,$P:L^2\to H^2$ 是直交射影,则 $T_\varphi=PM_\varphi:H^2(S^n)\to H^2(S^n)$称为 Toeplitz 算子,其中 M_φ 是 $L^2(S^n)$上的乘法算子.

设 H 是 Hilbert 空间,H 上的线性有界算子组记作 $T=(T_1\cdots T_n)$,$T_i\in L(H)$,(T_i 与 T_j 未必交换),$W(T)=\{((T_1x,x)\cdots(T_nx,x))\,|\,x\in H,\ \|x\|=1\}$称为 T 的联合数值域,$W_{es}(T)=\{\lambda\in C^n\,|\,\exists\ \{x_k\}\subset H,\ \|x_k\|=1,x_k\xrightarrow{w}0$,使$((T_1x_k,x_k)\cdots(T_nx_k,x_k))\to\lambda\}$. 称为 T 的联合本质数值域.

记 $T^\wedge=(((T_1T_2)^\wedge\operatorname{diag}(T_3))^\wedge\cdots\operatorname{diag}(T_n))^\wedge$,其中$(T_1T_2)^\wedge=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ -T_2^* & T_1^*\end{pmatrix}$. 它称为 Curto[1] 算子,$T$ 的联合谱定义为 $\mathrm{Sp}(T,H)=\{\lambda\in C\,|\,(T-\lambda)^\wedge$不可逆$\}$,若 $\lambda\notin\mathrm{Sp}(T,H)$,则称 $T-\lambda$ 是可逆组;当 T 是交换组时,如此定义的谱与 Taylor 谱是一样的. T 的联合本质谱定义为 $\mathrm{Sp}_e(T,H)=\{\lambda\in C^n\,|\,(T-\lambda)^\wedge$非 Fredholm 算子$\}$,若 $\lambda\notin\mathrm{Sp}_e(T,H)$,称 $T-\lambda$ 为 Fredholm 组或本质可逆组. T 的联合近似点谱定义为 $\mathrm{Sp}_\pi(T,H)=\{\lambda\in C^n\,|\,\exists\ \{x_k\}\subset H,\ \|x_k\|=1$,使 $\|(T_i-\lambda_i)x_k\|\to0,i=1,\cdots,n\}$. T 的联合点谱定义为 $\mathrm{Sp}_p(T,H)=\{\lambda\in C^n\,|\,\exists\ x\in H,\ \|x\|=1$,使 $T_ix=\lambda_ix,i=1,\cdots,n\}$.

对于 $\varphi_1\cdots\varphi_m\in L^\infty(S^n)$,$\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$的联合本质值域记作

$$\mathscr{R}(\varphi)=\{\lambda\in C^m\,|\,\sigma(E\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i-\lambda_i|<\varepsilon\})>0,\ \forall\,\varepsilon>0\},$$

σ 是球面测度.

§2 联合谱与联合数值域

命题 1 设 $T=(T_1\cdots T_n)$是 H 上算子组,则

$$\mathrm{Sp}_\pi(T,H)\subset\mathrm{Sp}(T,H)$$

证明 我们证明,当 n 是奇数时,$T^\wedge$ 的最后一列的元素或为 0 或为$\pm T_i$,当 n 是偶数时,$T^{\wedge*}$ 的最后一列不含$\pm T_i^*$. 事实上,$n=1,2$ 时结论显然,假设 $n=k$ 时,上述结论正确,当 $n=k+1$ 时,

* 1990年11月10日收到.

$$(T_1\cdots T_{k+1})^\wedge = \begin{bmatrix} (T_1\cdots T_k)^\wedge & \mathrm{diag}(T_{k+1}) \\ -\mathrm{diag}(T_{k+1}^*) & (T_1\cdots T_k)^{\wedge *} \end{bmatrix}$$

若 k 是偶数，则 $k+1$ 是奇数，由归纳假设 $(T_1\cdots T_k)^{\wedge *}$ 的最后一列不含 $\pm T_i^*$，从而 $(T_1\cdots T_{k+1})^\wedge$ 的最后一列不含 $\pm T_i^*$，若 k 是奇数，则 $k+1$ 是偶数，仍由归纳假设 $(T_1\cdots T_k)^\wedge$ 的最后一列不含 $\pm T_i^*$，于是 $(T_1\cdots T_{k+1})^\wedge = \begin{bmatrix} (T_1\cdots T_k)^\wedge & -\mathrm{diag}(T_{k+1}) \\ \mathrm{diag}(T_{k+1}^*) & (T_1\cdots T_k)^\wedge \end{bmatrix}$ 的最后一列不含 $\pm T_i^*$.

现设 $\lambda=(\lambda_1\cdots\lambda_n)\in \mathrm{Sp}_\pi(T)$，即存在 $\{x_k\}\subset H$，使 $\|(T_i-\lambda_i)x_k\|\to 0,(i=1,2,\cdots,n),k\to\infty$，令 $X_k=\overbrace{0\oplus\cdots\oplus 0}\oplus x_k$，则 $X_k\in \bigoplus_1^{2^{n-1}} H$，$\|X_k\|=1$，当 n 是奇数时 $\|(T-\lambda)^\wedge X_k\|\to 0$，当 n 是偶数时 $\|(T-\lambda)^{\wedge *}X_k\|\to 0$，总之 $(T-\lambda)^\wedge$ 不可逆，即 $\lambda\in \mathrm{Sp}(T)$. 综上知 $\mathrm{Sp}_\pi(T)\subset \mathrm{Sp}(T)$. □

若 $T=(T_1\cdots T_n)$ 是非交换算子组，则一般地谱映射定理不再成立，下面的例子说明了这一点.

例 1 存在算子对 $T=(T_1,T_2)$，使 $f(\mathrm{Sp}(T_1,T_2))\neq \mathrm{Sp}(f(T_1,T_2))$，其中 f 是非交换二元多项式.

事实上，令 H 是可分 Hilbert 空间，U 是 H 上的单位边移位（相对于某个正交 $\{e_n\}$）. $Ue_i=e_{i+1},i=1,2,\cdots$，则 $U^*e_i=\begin{cases} e_{i-1} & i=2,3,\cdots \\ 0 & i=1, \end{cases}$ $U^*U=I,UU^*=P$，P 是 H 到 $\bigvee_2^\infty\{e_i\}$ 的直交投影，故而 U 与 U^* 不可交换，$\sigma(U^*U)=\{1\}$，令 $T=(U^*,U)$，$f(z_1,z_2)=z_1\cdot z_2$，则 $f(U^*,U)=U^*U$. 注意到 $T^\wedge\begin{pmatrix} e_1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} U^* & U \\ -U^* & U\end{bmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ 0\end{pmatrix}=0$，故 $T^\wedge$ 不可逆，于是 $(0,0)\in \mathrm{Sp}(U^*,U)$，从而 $f(0,0)\in f[\mathrm{Sp}(U^*,U)]$，即 $0\in f[\mathrm{Sp}(U^*,U)]$. 但 $0\overline{\in} \mathrm{Sp}(f(U^*,U))=\sigma(U^*U)$.

注 进一步验证容易知道 $(U^*,U)^\wedge$ 不是 Fredholm 算子，即 (U^*,U) 非本质可逆. 换言之 $(0,0)\in \mathrm{Sp}_e(U^*,U)$，注意到 U 是本质正规的，故 (U^*,U) 是几乎交换算子组，由 Curto[1] 知此时的联合本质谱即 Taylor 意义下的联合本质谱. 然而 $U^*U=I$ 是可逆的，故 $0\overline{\in}\sigma_e(U^*U)=\mathrm{Sp}_e[f(U^*,U)]$，这就是说，对几乎交换算子组，Taylor 联合本质谱映射定理也不成立. A. c. Хачнштевн [2] 证明：若 $T=(T_1\cdots T_n)$ 是交换组，f 是 n 元解析函数组，则有 $f[\mathrm{Sp}_e(T)]=\mathrm{Sp}_e[f(T)]$，上例说明，该等式不能推广到几乎交换本质正规组的情形.

定理 1 设 $T=(T_1\cdots T_n)$ 是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子组，则对任意 n 元不可交换多项式组 $f(z_1\cdots z_n)=(f_1(z_1\cdots z_n),\cdots,f_m(z_1\cdots z_n))$，有

$$f[\mathrm{Sp}_\pi(T)]\subset \mathrm{Sp}_\pi(f(T)).$$

证明 显然，只需证明对任意 $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\in N^n$，$f(z_1\cdots z_n)=z^\alpha\overset{\triangle}{=}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$，有 $f(\mathrm{Sp}_\pi(T))\subset \mathrm{Sp}_\pi(f(T))$.（注意 z_i 与 z_j 的顺序改变后将视作新的多项式）. 易知对 $z=(z_1\cdots z_n)$，$\lambda=(\lambda_1\cdots\lambda_n)\in C^n$，$f(z)-f(\lambda)=z^\alpha-\lambda^\alpha=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f[t(z-\lambda)+\lambda]\mathrm{d}t$，完全类似于经典微积分的方法可知

$$f(z)-f(\lambda)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_0^1(t(z_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(z_i-\lambda_i)(t(z_i-\lambda_i)+\lambda_i)^{\alpha_i-1}\cdots(t(z_n-\lambda_n)+\lambda_n)^{\alpha_n}\mathrm{d}t$$

将积分表示成部分和的极限便可知

$$f(T)-f(\lambda)I=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_0^1(t(T_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(T_i-\lambda_i)(t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i)^{\alpha_i-1}\cdots(t(T_n-\lambda_n)+\lambda_n)^{\alpha_n}dt.$$

现设 $\lambda=(\lambda_1\cdots\lambda_n)\in Sp_\pi(T)$，即存在$\{x_k\}\subset H$，$\|x_k\|=1$，使 $\|(T_i-\lambda_i)x_k\|\to 0,(i=1,\cdots,n)$. 于是对任意 $\alpha_i\in N$，$\|(T_i-\lambda_i)^{\alpha_i}x_k\|\to 0,(i=1,\cdots,n)$. 将$[t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i]^{\alpha_i}$展开得

$$[t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i]^{\alpha_i}=\sum_{l=1}^{\alpha_i}C_{\alpha_i}^l[t(T_i-\lambda_i)]^l\cdot\lambda_i^{\alpha_i-l}.$$

显然 $\|\{\sum_{l=1}^{\alpha_i}C_{\alpha_i}^l[t(T_i-\lambda_i)]^l\cdot\lambda_i^{\alpha_i-l}\}x_k\|\to 0$，故而

$$\lim_{k\to\infty}\|(t(T_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(T_i-\lambda_i)(t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i)^{\alpha_i-1}\cdots(t(T_n-\lambda_n)^{\alpha_n}x_k\|$$
$$=\lim_{k\to\infty}\|(t(T_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}(T_i-\lambda_i)(\lambda_i^{\alpha_i-1}\cdot\lambda_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots\lambda_n^{\alpha_n})x_k\|=0.$$

进一步 $\|[\int_0^1(t(T_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(T_i-\lambda_i)(t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i)^{\alpha_i-1}\cdots(t(T_n-\lambda_n)+\lambda_n)^{\alpha_n}dt]x_k\|\to 0,k\to\infty$. 所以 $\|(f(T)-f(\lambda)I)x_k\|=\|\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_0^1(t(T_1-\lambda_1)+\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(T_i-\lambda_i)(t(T_i-\lambda_i)+\lambda_i)^{\alpha_i-1}\cdots(t(T_n-\lambda_n)+\lambda_n)^{\alpha_n}dt\}x_k\|\to 0$. 即 $f(\lambda)\in Sp_\pi(f(T))$. □

引理 1 设 $T=(T_1\cdots T_n)$是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子组，$X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{2^{n-1}}\end{bmatrix}\in\bigoplus_1^{2^{n-1}}H$，令$(T_1\cdots T_n)_j^\wedge$，$(T,\cdots T_n)^\wedge{}_j^*$分别表示$(T_1\cdots T_n)^\wedge$与$(T,\cdots T_n)^{\wedge *}$的第 j 行，$j=1,\cdots,2^{n-1}$. 则有

(1) $\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(T_lx_i,x_i)=\sum_{i,j=1}^{2^{n-1}}a_{ij}^lJ_{ji}(X,n)+\sum_{i,j=1}^{2^{n-1}}b_{ij}^l\bar{J}_{ji}(X,n)$

(2) $\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(T_l^*x_i,x_i)=\sum_{i,j=1}^{2^{n-1}}a_{ij}^lJ'_{ji}(X,n)+\sum_{i,j=1}^{2^{n-1}}b_{ij}^l\bar{J}'_{ij}(X,n)$

其中 $J_{ji}=(X,n)=((T_1\cdots T_n)_j^\wedge X,x_i)$，$J'_{ji}=((T_1\cdots T_n)^\wedge{}_j^* X,x_i)$，$a_{ij}^l,b_{ij}^l\in\{-1,0,1\}$，$l=1,2,\cdots,n$，$i,j=1,2,\cdots,2^{n-1}$.

证明 类似于交换算子组的证明[3].

定理 2 设 $T=(T_1\cdots T_n)$是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子组，则有

(1) $Sp(T,H)\subset \mathrm{Con}\,\overline{W(T)}$,

(2) $Sp_e(T,H)\subset \mathrm{Con}W_e(T,H)$.

证明 类似[3]、[4]关于交换算子组情形的证明.

§3 Toeplitz 算子组情形

引理 2 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是 $L^\infty(S^n)$中函数组，则 $\det(\varphi^\wedge)=(\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i|^2)^{2^{n-2}}$.

证明 由数学归纳法不难得证.

引理 3 设 φ 同引理 2，$M_\varphi=(M_{\varphi_1}\cdots M_{\varphi_m})$是 $L^2(S^n)$上乘法组，$T_\varphi=(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m})$是 $H^2(S^n)$上 Toeplitz 组，则 $Sp(M_\varphi,L^2(S^n))\subset Sp_e(T_\varphi,H^2(S^n))$.

证明 易知$(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m})^\wedge=T_{(\varphi_1\cdots\varphi_m)^\wedge}$，$\varphi^\wedge=(\varphi_1\cdots\varphi_m)^\wedge\in L^\infty_{M_{2^{m-1}}}(S^m)=L^\infty(S^m)\otimes M_{2^{m-1}}$，$M_{2^{m-1}}$是$2^{m-1}$阶矩阵代数，设$\mathscr{L}(L^\infty)$是含$\{T_\varphi|\varphi\in L^\infty\}$的最小闭子代数，$\mathscr{C}$是$\mathscr{L}$的换位子理想. P. N. Jewell[5]证明存在短正合序列

$$0\to\mathscr{C}\to\mathscr{L}(L^\infty(S^m))\to L^\infty(S^m)\to 0,$$

因此有短正合序列

$$0\to\mathscr{C}(L^\infty(S^m))\otimes M_{2^{m-1}}\to\mathscr{L}(L^\infty)\otimes M_{2^{m-1}}\to L^\infty\otimes M_{2^{m-1}}\to 0.$$

进而有短正合序列

$$0\to\mathscr{C}(L^\infty_{M_{2^{m-1}}}(S^m))\to\mathscr{L}(L^\infty_{M_{2^{m-1}}}(S^m))\to L^\infty_{M_{2^{m-1}}}(S^m)\to 0.$$

由此知，若$T_\varphi^\wedge$是 Fredholm 算子，则$\varphi^\wedge$在$L^\infty_{M_{2^{m-1}}}$中可逆，即$M_{\varphi^\wedge}$可逆，亦即M_φ是可逆组，故而$\mathrm{Sp}(M_\varphi,L^2)\subset(\mathrm{Sp}(T_\varphi,H^2)$.

引理 4 设$\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是$L^\infty(S^m)$中函数组，则$\mathscr{R}(\varphi)=\mathrm{Sp}(M_\varphi,L^2)$.

证明 设$\lambda\in(\mathrm{Sp}(M_\varphi)$，则$M_{(\varphi-\lambda)^\wedge}$不可逆，故$\det(\varphi-\lambda)^\wedge$不是本质下方有界的，由引理 2 知$\sum\limits_{i=1}^m|\varphi_i-\lambda_i|^2$下方本质无界，即$\lambda\in\mathscr{R}(\varphi)$. 反之，设$\lambda\in\mathscr{R}(\varphi)$，则$\sum\limits_{i=1}^m|\varphi_i-\lambda_i|^2$在$L^\infty(S^m)$中不可逆，故$\det(\varphi-\lambda)^\wedge$在$L^\infty(S^m)$中不可逆，进而$(\varphi-\lambda)^\wedge$在$L^\infty_{M_{2^{m-1}}}$中不可逆，即$\lambda\in\mathrm{Sp}(M_\varphi)$.

定理 3 设$\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是$C(S^m)$中函数组，则$\mathscr{R}(\varphi)=\mathrm{Sp}(M_\varphi)=\mathrm{Sp}_e(T_\varphi)$.

证明 由引理 3、4，只须证明$\mathrm{Sp}_e(T_\varphi)\subset\mathscr{R}(\varphi)$. 注意到，若$\lambda\overline{\in}\mathscr{R}(\varphi)$，则$(\varphi-\lambda)^\wedge$在$L^\infty_{M_{2^{m-1}}}(S^m)$中可逆，而$(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}\in C_{M_{2^{m-1}}}.(S^m)=C(S^m)\otimes M_{2^{m-1}}$. 于是 Hankel 算子$H_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}$是紧的. 由于

$$\begin{aligned}T_{(\varphi-\lambda)^\wedge}T_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}&=PM_{(\varphi-\lambda)^\wedge}PM_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}=PM_{(\varphi-\lambda)^\wedge}M_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}-PM_{(\varphi-\lambda)^\wedge}(I-P)M_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}\\&=I_{H^2_{M_{2^{m-1}}}(S^m)}-T_{(\varphi-\lambda)^\wedge}H_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}},\end{aligned}$$

类似地$T_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}T_{(\varphi-\lambda)^\wedge}=I_{H^2_{M_{2^{m-1}}}(S^m)}-T_{(\varphi-\lambda)^{\wedge-1}}H_{(\varphi-\lambda)^\wedge}$. 故$\lambda\overline{\in}\mathrm{Sp}_e(T_\varphi)$.

推论 1 (R. E. Curto[1])设$W_z=(W_{z_1}\cdots W_{z_n})$，$T_z=(T_{z_1}\cdots T_{z_n})$分别是$H^2(S^1\times\cdots\times S^1)$和$H^2(S^n)$上的乘法组，则

(1) $\mathrm{Sp}_e(W_z,H^2(S^1\times\cdots\times S^1))=\bigcup\limits_{i=1}^n(D_1\times\cdots\times D_{i-1}\times\partial D_i\times\cdots\times D_n)$;

(2) $\mathrm{Sp}_e(T_z,H^2(S^n))=S^n$;

(3) $\mathrm{Sp}(W_z,H^2(S^1\times\cdots\times S^1))=\prod\limits_{i=1}^n D_i$.

证明 2)是定理 3 的直接推论，至于 1)和 3)，只须注意$H^2(S^1\times\cdots\times S^1)=H^2(S^1)\otimes\cdots\otimes H^2(S^1)$便不难证明.

定理 4 设$\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是$L^\infty(S^m)$中函数组，则有

1) $\sigma(M_{\varphi_1}\cdots M_{\varphi_m})\subset\sigma(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m})$;

2) $\sigma_\pi(M_{\varphi_1}\cdots M_{\varphi_m})\subset\sigma_\pi(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m})$.

证明 设$f(z_1\cdots z_m)=z_1\cdots z_m$是$m$元非交单项式，由定理 1 知$f(\mathrm{Sp}_\pi(T_\varphi))\subset\mathrm{Sp}_\pi(f(T_\varphi))$. 我们可以证明$\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)\subset\mathrm{Sp}_\pi(T_\varphi)$. 事实上，由于$\{\xi^\alpha\cdot\bar{\xi}^\beta\}_{\alpha,\beta\in Z^n}$在$L^2(S^n)$中稠密($\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$，$\bar{\xi}^\alpha=\bar{\xi}_1^{\alpha_1}\cdots\bar{\xi}_n^{\alpha_n}$). 据此可构作$L^2(S^n)$的一组正交$\{eh\}_{h=-\infty}^{+\infty}$，并且$\{e_k\}_{k\geq0}$刚好是$H^2(S^n)$的正交基，令$W$是$L^2$

(S^n)上的双边移位，完全类似单个算子的情形，可证 $W^{*k}PW^k \xrightarrow{SOT} I$ $(k\to\infty)$，$W^{*k}T_{\varphi_i}PW^k \xrightarrow{SOT} M_{\varphi_i}$ $(k\to\infty)$，由此易知 $\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)\subset\mathrm{Sp}_\pi(T_\varphi)$. 又 M_φ 是 $L^2(S^n)$上交换正规组，故 $\mathrm{Sp}(M_\varphi)=\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)$，从而

$$f(\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)) = f[\mathrm{Sp}(M_\varphi)] = \mathrm{Sp}[f(M_\varphi)].$$

进一步

$$\sigma(M_{\varphi_1}\cdots M_{\varphi_m}) = \mathrm{Sp}(f(M_\varphi)) = f(\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)) \subset \mathrm{Sp}_\pi(f(T_\varphi)) \subset \sigma(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m}) \text{（命题 1）}.$$

1)式得证.

至于 2)式的证明事实上已蕴含在上述证明中.

注 从定理的证明可以看出，该定理可以叙述成更一般的形式：设 $f=(f_1\cdots f_l)$是 m 元非交换多项式组，则有 $\mathrm{Sp}(f(M_\varphi))\subset\mathrm{Sp}(f(T_\varphi))$及 $\mathrm{Sp}_\pi(f(M_\varphi))\subset\mathrm{Sp}_\pi(f(T_\varphi))$.

当 $n=1$ 时，定理 4 即[6]的主要结果及其推论.

引理 6 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是 $L^\infty(S^n)$中函数，则有 $\|T_\varphi\| = \|T_{\varphi^\wedge}\| = \|\varphi\|_\infty$，其中 $\|T_\varphi\| = \sup\{(\sum\|T_{\varphi_i}f\|^2)^{1/2}\} f\in H^2, \|f\| = 1$. $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathscr{R}(\varphi)\}$.

证明 注意 $M_{\varphi^\wedge}M^*_{\varphi^\wedge} = M_{\varphi^\wedge\varphi^{\wedge *}} = M_{\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^m|\varphi_i|^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{i=1}^m|\varphi_i|^2\end{pmatrix}}$，故 $\|M_{\varphi^\wedge}\|^2 = \|M_{\varphi^\wedge}M^*_{\varphi^\wedge}\| = \|M_{\sum_{i=1}^m|\varphi_i|^2}\| = |\sum_{i=1}^m|\varphi_i|^2|_\infty = \|\varphi\|^2_\infty$. 于是 $\|T_{\varphi^\wedge}\|\leqslant\|M_{\varphi^\wedge}\| = \|\varphi\|_\infty$.

又 $\|T_\varphi\|\geqslant r(T_\varphi)=\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathrm{Sp}(T_\varphi)\}$.（事实上，由于 $\mathrm{Sp}(T_\varphi)\subset\mathrm{con}\,\overline{W(T_\varphi)}$（定理 2），由此立知该不等式成立）. 故 $\|T_\varphi\|\geqslant\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathscr{R}(\varphi)\} = \|\varphi\|_\infty$. 而 $\|T_\varphi\| \leqslant \|M_\varphi\| = \sup\{(\sum\|M_{\varphi_i}f\|^2)^{1/2}|f\in L^2, \|f\| = 1\} = r(M_\varphi)$（因为 M_φ 是交换正规组）$=\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathrm{Sp}(M_\varphi)\}=\sup\{|\lambda|\lambda\in\mathscr{R}(\varphi)\} = \|\varphi\|_\infty$. 故而 $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. 进一步 $\|T_{\varphi_\wedge}\|\geqslant r(T_{\varphi^\wedge})\geqslant\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathscr{R}(\varphi^\wedge)\}=\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\mathscr{R}(\varphi^\wedge)\} = \|M_{\varphi^\wedge}\| = \|\varphi\|_\infty$，综上知 $\|T_\varphi\| = \|T_{\varphi^\wedge}\| = \|\varphi\|_\infty$.

命题 2 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是 $L^\infty(S^n)$中函数组，若它是 Taylor 意义下的可逆组（即 $M_\varphi=(M_{\varphi_1}\cdots M_{\varphi_m})$是可逆组），且其本质值域包含在 $K_0=\{z\in C^n|\mathrm{Re}z_1>0\}$中，则 $T_\varphi=(T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_m})$是可逆组.

证明 令 $O=\{z\in C^n|\,\|z-(1,0,\cdots,0)\|<1\}$，由条件知存在 $\varepsilon>0$，$\varepsilon\mathscr{R}(\varphi)\subset O$，于是

$$\|\varepsilon\varphi - (10\cdots0)\|_\infty = \sup(\sum_{i=2}^m|\varepsilon\varphi_i|^2 + |\varepsilon\varphi_1 - 1|^2)^{1/2} < 1.$$

由引理 6 知 $\|T_{\varepsilon\varphi^\wedge}-I\|<1$，从而 $T_{\varepsilon\varphi^\wedge}$ 可逆，于是 $T_{\varphi^\wedge}$ 可逆，即 T_φ 是可逆组.

定理 5 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是 $L^\infty(S^n)$中函数组，则 $\mathrm{Con}\mathscr{R}(\varphi)=\mathrm{ConSp}(T_\varphi)=\mathrm{Con}\,\overline{W(T_\varphi)}$.

证明 由定理 2，引理 3.4 立知 $\mathrm{Con}\mathscr{R}(\varphi)\subset\mathrm{ConSp}(T_\varphi)\subset\mathrm{Con}\,\overline{W(T_\varphi)}$，下证相反包含关系. 对任意 $f\in H^2(S^n)$，$\|f\|=1$，有

$$((T_{\varphi_1}f,f)\cdots(T_{\varphi_m}f,f)) = ((M_{\varphi_1}f,f)\cdots M_{\varphi_m}f,f)),$$

故 $W(T_\varphi)\subset W(M_\varphi)$，但 M_φ 是 $L^2(S^n)$上交换正规算子组，故$\overline{W(M_\varphi)}=\mathrm{ConSp}(M_\varphi)=\mathrm{Con}\mathscr{R}(\varphi)$，于是$\overline{W(T_\varphi)}\subset\overline{W(M_\varphi)}=\mathrm{Con}\mathscr{R}(\varphi)\subset\mathrm{ConSp}(T_\varphi)$，定理证毕.

定理 6 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$是 $L^\infty(S^n)$中函数组，则$\overline{W(T_\varphi)}$是凸集，从而 $W(T_\varphi)$是凸集.

证明 由 $\mathrm{Sp}(M_\varphi)=\mathrm{Sp}_\pi(M_\varphi)\subset\mathrm{Sp}_\pi(T_\varphi)$ 及定理 2，引理 3，定理 5 立知 $\mathrm{ConSp}_\pi(T_\varphi)=\mathrm{Con}\overline{W(T_\varphi)}$，又由[7]定理 1 知 $\sum(T_\varphi)=\mathrm{Con}W(T_\varphi)$. 于是 $\sum(T_\varphi)$ 的端点全在 $\mathrm{Sp}_\pi(T_\varphi)$ 中，由[7]定理 2 知 $\overline{W(T_\varphi)}$ 是凸集（$\sum(T_\varphi)$ 指 T_φ 的联合状态值域）.

推论 2 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$ 是 $L^\infty(S^n)$ 中函数组，则有

$$\mathrm{ConSp}_\pi(T_\varphi)=\mathrm{Con}S_{p_e}(T_\varphi)=\mathrm{ConSp}(T_\varphi)=\overline{W(T_\varphi)}.$$

注 $n=1$ 的情形为 Dash, A. T. [8]所证.

定理 7 设 $\varphi=(\varphi_1\cdots\varphi_m)$ 是 $L^\infty(S^n)$ 中函数组，则 $W(T_\varphi)$ 是开集.

证明 类似[9]中命题 3 的证明，可将 $W(T_\varphi)$ 转化成单个 Toeplitz 算子的情形，因此，我们仅需证明，若 $\varphi\in L^\infty(S^n)$，则 $W(T_\varphi)$ 没有端点，除非它仅含一点.

首先假设 φ 是 $L^\infty(S^n)$ 中实值函数，由定理 6 的推论 2（$m=1$ 的情形）及引理 3.4 知

$$\overline{W(T_\varphi)}=[\mathrm{ess\ inf}\varphi,\mathrm{ess\ sup}\varphi].$$

我们证明 $\lambda=\mathrm{ess\ inf}\varphi\bar{\in}W(T_\varphi)$ （$\mu=\mathrm{ess\ sup}\varphi\bar{\in}W(T_\varphi)$ 可类似证明）. 若不然，$\lambda\in W(T_\varphi)$，则存在 $f\in H^2(S^n)$，使得 $(T_\varphi f,f)=\lambda$，故 $\int_{S^n}(\varphi-\lambda)|f|^2d\sigma=0$，进而 $(\varphi-\lambda)|f|^2=0$ (a. e.)，由 W. Rudin [10]定理 5.5.9 知 $\varphi=\lambda$，故对于非常值函数 φ，一定有 $\lambda\bar{\in}W(T_\varphi)$，类似地 $\mu\bar{\in}W(T_\varphi)$.

下设 $\varphi\in L^\infty(S^n)$ 是非实值函数，不妨设 φ 非常值函数，并且 λ 是 $W(T_\varphi)$ 的一个端点，由旋转变换，可以假设 $W(T_{\varphi-\lambda})$ 位于右半平面，于是 0 是 $\mathrm{Re}W(T_{\varphi-\lambda})=W(\mathrm{Re}T_{\varphi-\lambda})$ 的端点，由前面的讨论知这是不可能的. 综上知 $W(T_\varphi)$ 没有端点，从而是凸开集.

参 考 文 献

[1] Curto, R. E. *Fredholm and invertible tuples of bounded linear operators*, Tran. Amer. Math. Soc. 266, No. 1 (1981) 129—159.

[2] Хайнштейн О совместном существенном спектре сЕмейства динейны Ф операТороb ф ункuионаbный анаu3 u ео приошеиия T. 14, Вып. 2, 1980, 83—84.

[3] 曹广福，Taylor 联合谱与联合数值域，吉林大学自然科学学报，No. 2，(1989) 39—44.

[4] 曹广福，联合本质谱、联合本质数值域与联合数值域的边界，数学研究与评论，No. 1(1990)，25—31.

[5] P. N. Jewell and A. M. Davie, *Toeplitz operators in several complex variables*, J. Functional Analysis, 26(1977), 356—368.

[6] 黄勇，Toeplitz 乘积的谱包含定理，数学研究与评论，No. 1(1990)，69—70.

[7] 范明，关于非正常算子组的联合数值域，数学学报 No. 4(1988)，448—455.

[8] Munco Chō and Makoto Takaguchi, *Boundary points of joint numerical ranges*, Pacific J. of Math. Vol. 95 No. 1(1981), 27—35.

[9] Dash, A. T., *Joint numerical ranges*, Glasnik Mat., 7(1972), 75—81.

[10] Rudin, W., *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer—Verlag New York Heidelberg Berlin 1980.