第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

Gr—Morita 对偶与 Morita 对偶*

张 圣 贵
(福建师范大学数学系,福州 350007)

摘 要

设 G 为有单位元 e 的群,$R=\bigoplus_{s\in G}R_s$ 和 $A=\bigoplus_{s\in G}A_s$ 都是有单位元的 G 型强分次环,$U=\bigoplus_{s\in G}U_s$ 是分次(R,A)—双模.本文主要证明了${}_RU_A$ 导出一个 Gr—Morita 对偶当且仅当${}_{R_e}U_{e\,A_e}$ 导出一个 Morita 对偶.

本文所用的符号与[2]相同.

引理 1 设 M 为分次左 R—模,

$$h_M:M\to \mathrm{Hom}_R(R,M),\ h(m)(r)=rm,\ r\in R, m\in M,$$

则 h_M 是 e 阶左 R—同构.若 M 是分次(R,A)—双模,则 h_M 是一个 e 阶(R,A)—同构.

证明 类似[1,4.5 Prop.].我们只要证 $\deg(h_M)=e$.事实上,对于 $m\in M_{yx}$,$a\in R_y$,$h_M(m)(a)=am\in M_{yx}$,则 $h_M(m)\in \mathrm{Hom}_R(R,M)_x$,故 $\deg(h_M)=e$.

引理 2 设 R 和 A 是强分次环,U 是分次(R,A)—双模,则

(1) $(\mathrm{Hom}_A(\ ,U))_e\cong \mathrm{Hom}_{A_e}((\ )_e,U_e)$;

(2) $\mathrm{Hom}_A(-\bigotimes_{A_e}A,U)\cong R\bigotimes_{R_e}\mathrm{Hom}_{A_e}(\ ,U_e)$.

证明 (1) $M\in gr-A$,设 $h_M:\mathrm{Hom}_A(M,U)_e\to \mathrm{Hom}_{A_e}(M_e,U_e)$,$h_M(f)=f|_{M_e}$,$f\in \mathrm{Hom}_A(M,U)_e$,显然 h_M 是映射.令

$$n_U:U_e\bigotimes_{A_e}A\to U,\ n_U(\sum u_i\otimes a_i)=\sum u_ia_i,\ \sum u_i\otimes a_i\in U_e\bigotimes_{A_e}A$$

$$n_M:M_e\bigotimes_{A_e}A\to M,\ n_M(\sum m_i\otimes a_i)=\sum m_ia_i,\ \sum m_i\otimes a_i\in M_e\bigotimes_{A_e}A.$$

由于 A 是强分次环,则 n_U 和 n_M 都是 e 阶右 A—同构.

若 $h_M(f)=f|_{M_e}=0$,则 $f=n_U(f|_{M_e}\bigotimes_{A_e}A)n_M^{-1}=0$,于是 h 是单射.对于 $g\in \mathrm{Hom}_{A_e}(M_e,U_e)$,存在 $n_U(g\bigotimes_{A_e}A)n_M^{-1}\in \mathrm{Hom}_A(M,U)_e$ 使得

$$h_M(n_U(g\bigotimes_{A_e}A)n_M^{-1})=g,$$

* 1991年2月19日收到.

则 h_M 是满的. 显然 h_M 是左 R—线性的，则 h_M 是左 R—同构.

设 $f:M\to N$ 是 $gr-A$ 的一个射，则右图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(N,U)_e & \xrightarrow{(\mathrm{Hom}_A((f)_e,U))_e} & \mathrm{Hom}_A(M,U)_e \\ \downarrow h_N & & \downarrow h_M \\ \mathrm{Hom}_{A_e}(N_e,U_e) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_e}(M_e,U_e) \end{array}$$

事实上，对所有 $k\in \mathrm{Hom}_A(N,U)$，$m\in M_e$，

$$h_M(\mathrm{Hom}_A(f,v))_e(k)(m) = h_M((kf)_e)(m) = (kf)_e|_{M_e}(m) = (kf)(m) = (k|_{M_e}(f)_e)(m)$$
$$= \mathrm{Hom}_{A_e}((f)_e,u_e)h_N(k)(m)$$

(2) $\mathrm{Hom}_A(-\underset{A_e}{\otimes},U)=\mathrm{Hom}_A(\ ,U)(-\underset{A_e}{\otimes}A)\cong(R\underset{R_e}{\otimes}-)(\ )_e\mathrm{Hom}_A(\ ,U)(-\underset{A_e}{\otimes}A)$，([2,I. 3. 4])

$\cong(R\underset{R_e}{\otimes}-)\mathrm{Hom}_{A_e}(\ ,U_e)(\ )_e(-\underset{A_e}{\otimes}A)$，((1))$\cong(R\underset{R_e}{\otimes}-)\mathrm{Hom}_A(\ ,U_e)$([2,I. 3. 4])

记 ${}^g(\ )^*=\mathrm{Hom}(\ ,U)$，${}^g(\ )^{**}={}^g({}^g(\ )^*)^*$. 若 $M\in R-gr$ 或 $gr-A$，令

$$H_M:M\to {}^g(M)^{**},\ H_M(m)(f)=f(m)\ f\in {}^g(M)^*,\ m\in M.$$

显然 H_M 是 e 阶同态. 于是 $H:|_{R-gr}\to {}^g(\ )^{**}$ 和 $H:|_{gr-A}\to {}^g(\ )^{**}$ 都是自然变换.

定义 1 (1) M 称为 $gr-U$—反射的，是指 H_M 是同构；

(2) 我们称 ${}_RU_A$ 导出一个 Gr—Morita 对偶，是指 ${}_RR$ 和 A_A 都是 $gr-U$—反射的，而且每一 $gr-U$—反射模的每个子模和商模都是 $gr-U$—反射的.

定理 3 设 R 和 A 都是强分次环，分次双模 ${}_RU_A$ 导出一个 Gr—Morita 对偶当且仅当 ${}_{R_e}U_{e_{A_e}}$ 导出一个 Morita 对偶.

证明 若 ${}_RU_A$ 导出一个 Morita 对偶，令 ${}_Rm(m_A)$ 是由所有 $gr-U$—反射左 R—(右 A—)模组成的 $R-gr(gr-A)$ 的完全子范畴，则 ${}_Rm(m_A)$ 对子模和商模是封闭的且 ${}_RR\in{}_Rm$ $(A\in m_A)$. 令 ${}_{R_e}n=({}_Rm)_R$ 且 $n_{A_e}=(m_A)_e$，则由[2,I. 3. 4]知 ${}_{R_e}n(n_{A_e})$ 是 R_e-mod $(mod-A_e)$ 完全子范畴且对子模和商模是封闭的，${}_{R_e}R_e\in{}_{R_e}n(A_{e_{A_e}}\in n_{A_e})$.

令 $H_1=(\mathrm{Hom}_A(-\underset{A_e}{\otimes}A,U))_e$，$H_2=(\mathrm{Hom}_R(R\underset{R_e}{\otimes}-,U))_e$，则 $H_1:n_{A_e}\to{}_{R_e}n$ 和 $H_2:{}_{R_e}n\to n_{A_e}$ 都是函子且 $H_1H_2=1$，$H_2H_1=1$ 则[1,23. 5]知存在一个 (R_e,A_e)—双模 ${}_{R_e}V_{A_e}$ 使得

(i) ${}_{R_e}V=H_1(A_e)$，$V_{A_e}=H_2(R_e)$；

(ii) $H_1\cong\mathrm{Hom}_{A_e}(\ ,V)$，$H_2\cong\mathrm{Hom}_{R_e}(\ ,V)$；

(iii) 所有 $M\in{}_{R_e}n(n_{A_e})$ 都是 V—反射的.

由(i)知

$${}_{R_e}V\cong H_1(A_e)\cong(\mathrm{Hom}_A(A_e\otimes A,U))_e\cong(\mathrm{Hom}_A(A,U))_e\cong{}_{R_e}U_e.$$

同理可证 $V_{A_e}\cong U_{e_{R_e}}$

则 ${}_{R_e}R_e$，$A_{e_{A_e}}$，${}_{R_e}U_e$ 和 $U_{e_{A_e}}$ 的每个商模都是 U_e—反射的. 由[1,24. 1]知 ${}_{R_e}U_{e_{A_e}}$ 导出一个 Morita 对偶.

若 ${}_{R_e}U_{e_{A_e}}$ 导出一个 Morita 对偶，令 ${}_{R_e}n(n_{A_e})$ 是由所有 U_e—反射左 R_e—(右 A_e—)模组成的 $R_e-mod(mod-A_e)$ 的完全子范畴，则 ${}_{R_e}n(n_{A_e})$ 对子模和商模都封闭且 ${}_{R_e}R_e\in{}_{R_e}n(A_{e_{A_e}}\in n_{A_e})$. 令 ${}_Rm'=R$

$\underset{R_e}{\otimes}({}_{R_e}n)$，$m'_A=(n_{A_e})\underset{A_e}{\otimes}A$，则由[2，I. 3. 4]知 ${}_Rm'$ 和 m'_A 分别是 $R-gr$ 和 $gr-A$ 的完全子范畴，对分次子模和分次商模是封闭的且 ${}_RR\in{}_Rm'$，$A_A\in m'_A$.

由引理 2，我们有

$$\mathrm{Hom}_R(\ ,U)\cong(-\underset{A_e}{\otimes}A)\mathrm{Hom}_{R_e}(\ ,U_e)(\ )_e,$$

$$\mathrm{Hom}_A(\ ,U)\cong(R\underset{R_e}{\otimes}-)\mathrm{Hom}_{A_e}(\ ,U_e)(\ )_e.$$

若 $M\in{}_Rm'$，则存在 $N\in{}_{R_e}n$ 使得 $M=R\underset{R_e}{\otimes}N$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_R(M,U),U)&\cong R\underset{R_e}{\otimes}\mathrm{Hom}_{A_e}(\mathrm{Hom}_{R_e}((M)_e,U_e),U_e)\\&\cong R\underset{R_e}{\otimes}\mathrm{Hom}_{A_e}(\mathrm{Hom}_{R_e}(N,U_e),U_e)\\&\cong R\underset{R_e}{\otimes}N=M.\end{aligned}$$

因而 M 是 $gr-U-$反射的. 故

$${}_Rm'\subseteq{}_Rm=\{\text{所有 } gr-U-\text{ 反射左 } R-\text{ 模}\}.$$

由引理 2 知

$$\mathrm{Hom}_{R_e}(\ ,U_e)\cong(\ )_e\mathrm{Hom}_R(\ ,U)(R\underset{R_e}{\otimes}-)$$

$$\mathrm{Hom}_{A_e}(\ ,U_e)\cong(\ )_e\mathrm{Hom}_A(\ ,U)(-\underset{A_e}{\otimes}A)$$

若 $M\in{}_Rm$，则 M 是 $gr-U-$反射的，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A_e}(\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,U_e),U_e)&\cong(\ )_e\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_R(\ ,U),U)(R\underset{R_e}{\otimes}M)\\&\cong(\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_R(M,U),U))_e\cong M_e.\end{aligned}$$

因此 $M_e\in{}_{R_e}n$，于是 $M\cong R\underset{R_e}{\otimes}M_e\in{}_Rm'$，故 ${}_Rm\subseteq{}_Rm'$.

同理可证 $m'_A=m_A$.

于是 ${}_RU_A$ 导出一个 $Gr-$Morita 对偶.

引理 4 设 R 是强分次环，M 是左 R_e-模，则 $\mathrm{End}_R(R\underset{R_e}{\otimes}M)_e\cong\mathrm{End}({}_{R_e}M)$.

证明 令 $h:\mathrm{End}({}_{R_e}M)_e\to\mathrm{End}_R(R\underset{R_e}{\otimes}M)_e$，$h(f)=(R\underset{R_e}{\otimes}f)_e$，$f\in\mathrm{End}({}_{R_e}M)$，显然 h 是映射.

若 $h(f)=0$，即 $(R\underset{R_e}{\otimes}f)_e=0$，则对所有 $m\in M$，$0=(R\underset{R_e}{\otimes}f)_e(1\otimes f(m))=f(m)$，故 $f=0$，从而 h 为单射.

对于 $g\in\mathrm{End}_R(R\underset{R_e}{\otimes}M)_e$，必存在 $f=n_{R\underset{R_e}{\otimes}M}(g)_en^{-1}_{R\underset{R_e}{\otimes}M}\in\mathrm{End}({}_{R_e}M)$ 使得 $h(f)=g$，其中 $n_{R\underset{R_e}{\otimes}M}$ 的定义与引理 2 的证明中的定义相同. 于是 h 是满射.

显然 h 保持加法. 对 $f\ g\in\mathrm{End}({}_{R_e}M)$，$r\otimes m\in R\underset{R_e}{\otimes}M$，有

$$\begin{aligned}h(f\cdot g)(r\otimes m)&=R\underset{R_e}{\otimes}(f\cdot g))_e(r\otimes m)=r_e\otimes fg(m)=r_e\otimes f(g(m))\\&=(R\underset{R_e}{\otimes}f)_e(R\otimes g)_e(r\otimes m)=h(f)h(g)(r\otimes m).\end{aligned}$$

即 h 保持乘法，因此 h 是环同构.

定义 2 (1) 我们称 ${}_RU$ 导出 R 的左 $Gr-$Morita 对偶，是指分次双模 ${}_RU_{\mathrm{End}_RU}$ 导出一个 $Gr-$Morita 对偶；

(2) R 称为左 Gr—Morita 环，是指有一个分次左 R—模 $_RU$ 导出一个左 Gr—Morita 对偶.

定理 5 设 R 是强分次环，$_{R_e}U$ 是一个分次左 R_e—模. 若 $_{R_e}U$ 导出 R_e 的一个左 Morita 对偶，且对所有 $x\in G$，$_{R_e}R_x\underset{R_e}{\otimes}U$ 弱同构于 $_{R_e}V$，则 $_R R\underset{R_e}{\otimes}U$ 导出一个左 Gr—Morita 对偶.

证明 由[2, I. 5. 2]知 $\mathrm{End}_R(R\underset{R_e}{\otimes}U)$ 是强分次环. 由引理 4 知 $\mathrm{End}_R(R\underset{R_e}{\otimes}U)_e)\cong End(_{R_e}U_e)$. 由定理 3 知 $_R(R\underset{R_e}{\otimes}U)_{\mathrm{End}_R(R\otimes U)}$ 导出一个 Gr—Morita 对偶，即 $_RR\underset{R_e}{\otimes}U$ 导出 R 的一个左 Gr—Morita 对偶.

例 令 K 是一个域，x 是未定元，$R=K[x,x^{-1}]$，$R_n=Kx^n$，$n\in\mathbf{Z}$，则 R 是 $\mathbf{Z}$ 型分次域. 由定理 5 知 R 是一个左 Gr—Morita 环. 但是 R 不是 Morita 环，因为 R 不是线性紧的.

本文作者感谢薛卫民副教授的鼓励.

参 考 文 献

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer—Verlag New York, Heidelberg, Berlin. 1974.

[2] C. Nasescu and F. Vanoystaeyen, *Graded ring theory*, North—Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982.

[3] B. J. Müller, *Linear compactness and Morita duality*, J. of Algebra 16(1970), 60—66.

Gr-Morita Duality and Morita Duality

Zhang Shenggui

(Dept. of Math., Fujian Teachers University, Fuzhou)

Abstract

Let G be a group with identity e. Let $R=\underset{x\in G}{\oplus}R_x$ and $A=\underset{x\in G}{\oplus}A_x$ be strongly graded rings of type G with identity, respectively, and $U=\underset{x\in G}{\oplus}U_x$ be a graded (R,A)-bimodule. It is shown that $_RU_A$ induces a gr-Morita duality iff $_{R_e}U_{e_{A_e}}$ induces a Morita duality.