第13卷第1期 1993年2月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 13 No. 1 Feb. 1993

弱半局部环的同调性质*

赵逸才

(广西师范大学应用数学研究所,桂林 541004)

摘要

环 R 称为弱半局部环,如果 $R/J(R)$ 是 Von Neumann 正则环. 给出了一个交换环是弱半局部环的充分且必要条件;还讨论了交换凝聚弱半局部环及其模的同调维数.

设 R 是一个环,J 是 R 的 Jacobson 根. 如果 R/J 是单 Artin 环,则称 R 是局部环;如果 R/J 是半单 Artin 环(即 $\mathrm{gl.dim}\,R/J=0$),则称 R 是半局部环;如果 R/J 是 Von Neumann 正则环(即 $\mathrm{w.gl.dim}\,R/J=0$),则称 R 是弱半局部环. 由于任何一个非半单 Artin 的 Von Neumann 正则环均不是半局部环,故弱半局部环类比半局部环类范围更宽. 本文给出了一个交换环是弱半局部环的充分且必要条件. 此外,证明了一个交换凝聚弱半局部环的弱整体维数可由单模决定.

以下所提到的环均指带单位元的交换环,R 始终表示一个环. $\mathrm{gl.dim}\,R$, $\mathrm{w.gl.dim}\,R$, $\max(R)$, $pd_R(M)$, $\mathrm{w.d}_R(M)$ 分别表示环 R 的整体维数,弱整体维数,R 的一切极大理想的集合,R—模 M 的投射维数,平坦维数. $\forall\, m\in\max(R)$, R_m 表示 R 关于 $R-m$ 的局部化环. 所用概念与[1]一致.

环 R 称为不可分的,如果 1 是本原幂等元. 例如局部环均是不可分的. 如果 R 是有限个不可分环的直和,则称 R 有有限分解.

命题 1 设 R 是一个弱半局部环,J 是 R 的 Jacobson 根,则

(1) R 是局部环$\Leftrightarrow R/J$ 是不可分的;

(2) R 是完全环$\Leftrightarrow R$ 有有限分解,且 J 是 T—幂零的;

(3) R 是半完全环$\Leftrightarrow R$ 有有限分解,且 J 是幂等元提升根;

(4) R 是半局部环$\Leftrightarrow R/J$ 有有限分解.

证明 (1) 若 R 是局部环,因 R 是交换环,故 R/J 是除环,从而是不可分的. 反之,若 R/J 是不可分的,则 T 是 $\bar{R}=R/J$ 仅有的非零幂等元. 但 $\bar{R}$ 是 Von Neumann 正则环,由[1]引理 4.15, $\forall\, x\in\bar{R}$, $x\bar{R}=T\bar{R}=\bar{R}$, 即 x 是 $\bar{R}$ 的可逆元. 可是,$\bar{R}$ 是除环,从而 R 是局部环.

(4) 若 $\bar{R}=R/J$ 有有限分解,则 $\bar{R}=\bar{R}_1\oplus\cdots\oplus\bar{R}_n$,这里每个 $\bar{R}_i$ 都是不可分的. 对任意一个 $\bar{R}_i$, $\forall\, 0\neq x\in\bar{R}_i$, 因 $\bar{R}$ 是 Von Neumann 正则环,故存在幂等元 $e\in\bar{R}$, 使 $x\bar{R}=e\bar{R}$. 但 $x\bar{R}=x\bar{R}_i\subseteq\bar{R}_i$, 故 $e\in\bar{R}_i$. 因 $\bar{R}_i$ 是不可分的,故 e 是 $\bar{R}_i$ 的单位元. 于是,$x\bar{R}_i=x\bar{R}=e\bar{R}=e\bar{R}_i=\bar{R}_i$, 即 x 是 $\bar{R}_i$ 的可逆元. 因此,$\bar{R}_i$ 是除环,从而 $\bar{R}$ 是半单 Artin 环. 所以,R 是半局部环.

* 1991年2月17日收到.

反之，显然.

(2)和(3)，不难由(4)推出.

定理 2 设 R 是一个交换环，J 是 R 的 Jacobson 根，则下述等价：

(1) R 是弱半局部环；

(2) $\forall\ m\in \max(R)$，$J_m=m_m$；

(3) 包含 J 的素理想均是极大理想.

证明 (1)⇒(3) 设 P 是包含 J 的一个素理想，则存在 $m\in\max(R)$，使 $P\subseteq m$. 如果 $P\neq m$，则在环 $\overline{R}=R/J$ 中存在 $x\in\overline{m}-\overline{P}$. 于是 x 在 $\overline{R}$ 中的零化子 $\mathrm{ann}_{\overline{R}}(x)\subseteq\overline{P}\subseteq\overline{m}$. 因 $\overline{R}$ 是 Von Neumann 正则环，故存在幂等元 $e\in\overline{R}$，使 $x\overline{R}=e\overline{R}\subseteq\overline{m}$，于是 $e\in\overline{m}$. 但又有 $1-e\in\mathrm{ann}_{\overline{R}}(x)\subseteq\overline{m}$，由此得，$e$ 和 $1-e$ 都属于 $\overline{m}$，矛盾. 因此，$P=m$.

(3)⇒(2) $\forall\ m\in\max(R)$，$\overline{m}=m/J$ 是 $\overline{R}=R/J$ 的极小素理想. 从而 $\overline{m}_{\overline{m}}$ 是 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 的极小素理想. 因局部环 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 只有一个极大理想，故 $\overline{m}_{\overline{m}}$ 是 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 仅有的一个素理想. 因此，$\overline{m}_{\overline{m}}$ 由幂零元组成. $\forall\ x\in\overline{m}$，存在 $n>0$，使在环 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 中 $\frac{x^n}{1}=0$，即存在 $s\in R$，且 $\bar{s}\notin\overline{m}$，使 $\bar{s}x^n=0$. 于是，$(\bar{s}x)^n=0$. 但 J 是 R 中一切包含 J 的素理想的交，由[2]命题 1.14 知，$\overline{R}=R/J$ 的幂零元为 0. 因此，$sx=\bar{s}x=0$. 因 $\bar{s}\notin\overline{m}$，故 $s\notin m$，于是在环 R_m 中，$\frac{s}{1}$是可逆元，由$\frac{sx}{1}=0$ 得$\frac{x}{1}=0$. 因此，$(m/J)_m=\overline{m}_m=0$，从而 $J_m=m_m$.

(2)⇒(1) $\forall\ m\in\max(R)$，$J_m=m_m$，即 $\overline{m}_m=(m/J)_m=0$，故$\forall\ x\in\overline{m}$，存在 $s\in R-m$，使 $xs=0$. 因 $s\notin m$，故 $\bar{s}\notin\overline{m}$，即$\frac{\bar{s}}{1}$是 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 的可逆元. 又在环 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 中，$\frac{x}{1}\frac{\bar{s}}{1}=\frac{x\bar{s}}{1}=0$，故$\frac{x}{1}=0$. 因此，$\overline{m}_{\overline{m}}=0$，即 $\overline{R}_{\overline{m}}$ 是除环. 于是，对任意的 $\overline{R}-$模 A，$A_{\overline{m}}$ 是平坦 $\overline{R}_{\overline{m}}-$模，从而 A 是平坦 $\overline{R}-$模. 由[1]定理 4.16，$R/J=\overline{R}$ 是 Von Neumann 正则环，即 R 是弱半局部环.

推论 3 设 R 是一个弱半局部环，J 是 R 的 Jacobson 根. 如果 $I\lhd R$，且 $I\supseteq J$，那么

(1) $\forall\ m\in\max\ (R)$，$I\cap m=Im+J$；

(2) I 是 R 中一切包含 I 的极大理想的交.

证明 (1) $\forall\ m\in\max\ (R)$，由定理 2，$J_m=m_m$，故 $I_m\supseteq m_m$. $(I\cap m)_m=I_m\cap m_m=m_m$，$(Im+J)_m=I_mm_m+J_m=I_mm_m+m_m=m_m$. 因此，$(I\cap m)_m=(Im+J)_m$. 又任取 $w\in\max\ (R)$，且 $w\neq m$，当 $I\nsubseteq w$ 时，$(I\cap m)_w=I_w\cap m_w=R_w\cap R_w=R_w$，$(Im+J)_w=I_wm_w+J_w=R_wR_w+J_w=R_w$；当 $I\subseteq w$ 时，$(I\cap m)_w=I_w\cap m_w=w_w\cap R_w=w_w$，$(Im+J)_w=I_wm_w+J_w=w_wR_w+w_w=w_w$.

综合上述，$\forall\ w\in\max\ (R)$，$(I\cap m)_w=(Im+J)_w$，故$((I\cap m)/(Im+J))_w=0$. 由[2]命题 3.8，$(I\cap m)/(Im+J)=0$. 所以，$I\cap m=Im+J$.

(2) $\forall\ x\in R$，如果有某个 $n>0$ 使 $x^n\in I$，因 $\overline{R}=R/J$ 是 Von Neumann 正则环，故存在幂等元 $e\in\overline{R}$，使 $\bar{x}\overline{R}=e\overline{R}$. 因此，$\bar{x}^n\overline{R}=e^n\overline{R}=e\overline{R}$，故 $\bar{x}\in\bar{I}$，从而 $x\in I$. 由[2]命题 1.14 知，I 是 R 中的一切包含 I 的素理想的交. 再由定理 2，包含 I 的素理想都是极大理想.

设 R 是一个交换环，M 是 $R-$模. 称 M 是有限相关的，如果存在正合列 $P_1\to P_0\to M\to 0$，使 P_1 和 P_0 都是有限生成的投射 $R-$模. 如果 R 的每个有限生成理想都是有限相关的，则称 R 是凝聚环.

文[3]和[4]分别证明了，凝聚局部环的弱整体维数和 Noether 半局部环的整体维数可由

单模来决定. 更一般地，我们有以下结论

定理 4 设 R 是一个凝聚弱半局部环，M 是有限相关 R—模，则下述等价：

(1) $\mathrm{pd}_R(M)\leqslant n$;

(2) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/J)=0$;

(3) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)=0$, $\forall\ m\in\max(R)$.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 任取 $m\in\mathrm{Max}(R)$，由[5]定理(3. E)，$\forall\ w\in\max(R)$，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)_w=\mathrm{Tor}_{n+1}^{R_w}(M_w,R_w/m_w)$. 当 $w\in m$ 时，$R_w/m_w=R_w/R_w=0$，故 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(M,R/m)_w=0$；当 $w=m$ 时，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)_w=\mathrm{Tor}_{n+1}^{R_m}(M_m,R_m/m_m)$，由定理 2，$J_m=m_m$，故 $R_m/m_m=(R/J)_m$. 因此，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)_w=\mathrm{Tor}_{n+1}^{R_m}(M_m,(R/J)_m)=\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/J)_m=0$. 由[2]命题 3. 8 知，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)=0$.

(3)⇒(1) 因 R 是凝聚环，且 M 是有限相关的，由[6]命题 2. 2，存在正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

这里 K 是有限相关 R—模，每个 P_i 都是有限生成的投射 R—模.

$\forall\ m\in\max(R)$，得正合列

$$0\to K_m\to P_{n-1\,m}\to\cdots\to P_{1m}\to P_{0m}\to M_m\to 0.$$

因 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)=0$，故 $\mathrm{Tor}_{n+1}^{R_m}(M_m,R_m/m_m)=0$，由[3]引理 5. 11，$\mathrm{pd}_{R_m}(M_m)\leqslant n$，即 K_m 是 R_m—投射的，于是 K 是 R—平坦的. 又 K 是有限相关的，故 K 是投射的. 因此，$\mathrm{pd}_R(M)\leqslant n$.

推论 5 设 R 是一个凝聚弱半局部环，J 是 Jacobson 根. 设 M 是一个有限相关的 R—模，则下述等价：

(1) M 是投射的；

(2) $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/J)=0$;

(3) $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/m)=0$, $\forall\ m\in\max(R)$.

定理 6 设 R 是一个凝聚半局部环，J 是其 Jacobson 根，则

(1) $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=\sup\{\mathrm{w.\,d}_R(R/m)\mid m\in\max(R)\}=\mathrm{w.\,d}_R(R/J)$;

(2) 如果 J 是有限生成的，那么

$$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=n\Leftrightarrow\mathrm{Tor}_{n+1}^R(R/J,R/J)=0,\text{且}\ \mathrm{Tor}_n^R(R/J,R/J)\neq 0.$$

证明 (1) 设 M 是任意一个有限相关 R—模，记 $n=\mathrm{w.\,d}_R(R/J)$. 只需考虑 $n<\infty$ 的情况. 因 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/J)=0$，由定理 4，$\mathrm{pd}_R(M)\leqslant n$. 由于 R 是凝聚环，故 $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\mid M$ 是有限相关 R—模$\}$. 因此，$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R\leqslant n$. 由此得，$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=\mathrm{w.\,d}_R(R/J)$. 另外，再由定理 4 知，$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/J)=0$ 当且仅当 $\forall\ m\in\max(R)$，有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,R/m)=0$. 因此，

$$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=\mathrm{w.\,d}_R(R/J)=\sup\{\mathrm{w.\,d}_r(R/m)\mid m\in\max(R)\}.$$

(2) 如果 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(R/J,R/J)=0$，且 $\mathrm{Tor}_n^R(R/J,R/J)\neq 0$，则 $\mathrm{w.\,d}_R(R/J)\geqslant n$. 又 J 是有限生的，即 R/J 是有限相关的，由定理 4 知，$\mathrm{w.\,d}_R(R/J)\leqslant n$，从而 $\mathrm{w.\,d}_R(R/J)=n$，再由(1)知，$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=n$.

反之，如果 $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R=n$，则 $\mathrm{w.\,d}_R(R/J)\leqslant n$，故 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(R/J,R/J)=0$. 如果 $\mathrm{Tor}_n^R(R/J,R/J)=0$，则由上面的证明知，$\mathrm{w.\,gl.\,dim}\ R<n$. 矛盾.

推论 7 设 R 是一个凝聚弱半局部环，J 是其 Jacobson 根，则下述等价：

(1) R 是 Von Neumann 正则环；

(2) $J=0$；

(3) $\forall\ I\lhd R,\ I\cap J=IJ$；

(4) $\forall\ I\lhd R,\ \forall\ m\in\max(R),\ I\cap m=Im$；

(5) R/J 是平坦 R—模；

(6) R/m 是平坦 R—模，$\forall\ m\in\max(R)$，即每个单 R—模是平坦的.

证明 (1)⇔(5)⇔(6)，由定理 6 和[1]定理 4.16 即得

(1)⇒(2) 因 w. gl. dim $R=0$，故$\forall\ m\in\max(R)$，w. gl. dim $R_m=0$，即 R_m 是 Von Neumann 正则环. 对任意 $0\neq x\in R_m$，xR_m 是 R_m 的直和项，但 R_m 是不可分的，故 $xR_m=R_m$，即 x 是可逆元. 所以 R_m 是除环，于是 $J_m=0$，从而 $J=0$.

(2)⇒(4) 由推论 3 得.

(4)⇒(3) $\forall\ m\in\max(R)$，由定理 2 得，$(I\cap J)_m=I_m\cap J_m=I_m\cap m_m=(I\cap m)_m=(Im)_m=I_m m_m=I_m J_m=(IJ)_m$. 所以，$I\cap J=IJ$.

(3)⇒(1) $\forall\ x\in J$，则 $xR=xR\cap J=xJ$，故存在 $r\in J$，使 $x=xr$，$x(1-r)=0$. 但 $1-r$ 是可逆元，故 $x=0$. 所以 $J=0$，从而 R 是 Von Neumann 正则环.

参 考 文 献

[1] Rotman, J. J., *An introduction to Homological Algebra*, New York, 1979.

[2] M. F. 阿蒂亚，I. G. 麦克唐纳，《交换代数导引》，科学出版社，1982.

[3] W. V. Vasconcelos, *The Rings of Dimension Two*, Dekker, New York, 1976.

[4] 徐金中，半局部环上的模及其同调维数，数学年刊，7A(6) 1986.

[5] H. Matsumura, *Commutative Algebra (Second Edition)*, The Benjamin, Inc., 1980.

[6] H. K. Ng, *Finitely presented dimension of commutative rings and modules*, Pacific J. Math. 113(1984), 417—431.

Homological Properties of Weak Semilocal Rings

Zhao Yicai

(Dept. of Math., Guangxi Teachers University, Guilin)

Abstract

A ring R is called to be weak semilocal if $R/J(R)$ is Von Neumann regular. We give a necessary and sufficient condition for a commutative ring to be weak semilocal. The homological dimension of commutative coherent weak semilocal rings and modules are also discussed.