第13卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 1
1993年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1993

# 格序群的上下子群和Saturated子群的构造*

郑 熙 强
(南昌航空工业学院基础一部，南昌 330034)

## 摘 要

本文对[1]中关于极大上下对的公开问题给出否定的回答并构造了例子说明[2]中命题2.1证明过程中的错误；研究了saturated子群的构造，得到了任意$l$—群的正交子集生成的saturated子群以及投射$l$—群的任一子集生成的saturated子群的具体形式.

## §1 格序群的上下子群

[1]的最后提出：If $(L,U_1)$ and $(L,U_2)$ are maximal above and below pairs in $G$, then are $U_1$ and $U_2$ $l$—isomorphic? [2]的命题5.9后面指出此问题仍未解决. 令 $G=Z\overleftarrow{\times}R$, $G\ni(z,r)\geqslant 0\Leftrightarrow$“$r>0$”或“$r=0$且$z\geqslant 0$”，$L=Z\overleftarrow{\times}0$, $U_1=0\overleftarrow{\times}R$, $A=\{(n,n)\in G\mid n\in Z\}$，由[2]中定理1.6存在$U_2\supseteq A$使$U_2$极大上于$L$，易知$(L,U_1)$，$(L,U_2)$都是$G$的极大上下对但$U_1$是可除$l$—子群$U_2$不可除，故$U_1$不与$U_2$ $l$—同构，故该公开问题结论不成立.

**命题1.1** 当$G$是可除Abel全序群时，$U_1$与$U_2$ $l$—同构.

**证明** 由[2]中定理1.6，$L\in C(G)$. 假设$U_1+L\neq G$，则$\exists\ g_0\in G\backslash(U_1+L)$，$U_1$极大上于$L$推得由$\{g_0\}\cup U_1$生成的子群不上于$L$，则$\exists\ 0\neq m\in Z, u\in U_1, c\in L$使$mg_0-u$不上于$c$，则$mg_0-u\in G(c)\subseteq L$，令$c_0=mg_0-u$. 由[2]中推论1.10，$U_1$可除；$G$可除推得$L$可除；则$\exists\ u'\in U_1, c'\in L$使$u=mu'$，$c_0=mc'$，则$g_0=u'+c'\in U_1+L$矛盾. 故$U_1+L=G$，又$U_1$上于$L$，则$U_1\cong G/L\cong U_2$.

**命题1.2** 设$G$是$\sigma,\pi$决定的$B$商$A$的分裂扩张，则$A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}[a]'\subseteq B$.

**证明** 由[2]中引理3.9直接验证.

**例1** 令$Z_i=Z(i\in N)$，$A=\overleftarrow{\bigotimes_{i\in N}}Z_i$. $\forall\ 0\neq a\in A$，$\lambda_a$表示$a$的支集的最小元. $B$为末端为常数的整数序列构成的$l$—群(见[5]中2.7). $\forall\ 0\neq a\in A$，令$[a]=\{b\in B\mid b$的支集$\subseteq\{2,4,\cdots,2\lambda_a\}\}$，则$[a]'=\{b\in B\mid b_2=b_4=\cdots=b_{2\lambda_a}=0\}$，令$\sigma(a)$是$B$的恒同映射，$G$是$\sigma,\pi$决定的$B$商$A$的分裂扩张. 由命题1.2，$A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}[a]'=\{b\in B\mid b_i=0(i$为偶数$)\}\subset B$，令$A^{\perp}=B_0$，由[2]引理3.9，

$$(A^{\perp\perp})^+=\{(a,b)\in G\mid a\geqslant 0, b\mu(a)\in 0, (b\wedge b_0)\mu(a)=0\ (\forall\ b_0\geqslant B_0^+)\},\qquad(*)$$

$b\mu(a)\geqslant 0$推得$b_i=0\ (i\in N\backslash\{2,4,:,2\lambda_a\})$. 令$\theta^{(2n-1)}\in B$，其第$2n-1$分量为$b_{2n-1}$，其余分量都是0，则$\theta^{(2n-1)}\in B_0^+(n\in N)$. $\theta^{(2n-1)}$代替$(*)$式中的$b_0$得$b_{2n-1}=0$，故$b\in B_0\subset B$. 推得$B\not\subseteq A^{\perp\perp}\oplus$

* 1990年8月11日收到.

$A^{\perp}$. 令 $C=A^{\perp\perp}$，则 $B\cap A^{\perp\perp}\subset C$ 且 $C\vee A^{\perp}\supsetneq B\vee A^{\perp}$，然而 $B\vee A^{\perp}=B$ 在 $G$ 中极大下于 $A$，故[2]中命题 2.1 的(a)推(b)的证明是错误的. 类似原来的证明，该命题可修改为如下命题：

**命题** 1.3 设 $A,C$ 是 $G$ 的 $l$—子群，$A\subseteq C$，$B\in C(G)$，则(b)$\Leftrightarrow$(c)；当 $G=C^{\perp\perp}\oplus A^{\perp}$ 时，(a)$\Leftrightarrow$(c). 其中(a) $B\vee C^{\perp}$ 在 $G$ 中极大下于 $A$；(b) $B\cap C^{\perp\perp}$ 在 $C^{\perp\perp}$ 中极大下于 $A$；(c) $B\cap C^{\perp\perp}$ 在 $G$ 中极大下于 $A\oplus C^{\perp}$.

**定理** 1.4 若 $a$ 上于 $b$，则 $a$ 生成的子群 $\langle a\rangle$ 上于 $b$ 生成的凸 $l$—子群 $G(b)$ 且 $a$ 的分量也上于 $b$.

**证明** 由[2]中命题 1.1(b)，$a$ 上于 $b\Leftrightarrow n|b|\wedge|a|$ 是 $n|b|$ 的分量($\forall\ n\in N$). 则$\forall\ m\in Z$，$0\leqslant n|b|\wedge|ma|\wedge(n|b|-n|b|\wedge|ma|)\leqslant|m|(n|b|\wedge|a|\wedge(n|b|-n|b|\wedge|a|))=0$，故 $n|b|\wedge|ma|$ 也是 $n|b|$ 的分量，故 $ma$ 也上于 $b$. 若 $a$ 上于 $b$ 即 $|a|\wedge|b|\ll|a|$，则$\forall\ x\in G(b)$，$\exists\ n_0\in N$，$|x|\leqslant n_0|b|$，则 $|x|\wedge|a|\leqslant n_0(|b|\wedge|a|)\ll|a|$，故$\langle a\rangle$上于 $G(b)$. 由[2]定理 1.6，$\exists\ M\supseteq\langle a\rangle$使 $M$ 极大于上于 $G(b)$ 且 $M$ 是 saturated 子群，故 $a$ 的分量上于 $b$.

**推论** 1.5 若 $a$ 上于 $b$，则 $ma$ 上于 $b$($\forall\ m\in Z$).

**例** 2 令 $A(R)$为 $R$ 的保序置换群，$\alpha,\beta\in A(R)$为

$$\alpha(t)=\begin{cases}\sqrt{t}+1, & t\in(0,1]\\(t-1)^2+2, & t\in(1,2],\\ t+1, & \text{其它}\end{cases}\qquad \beta(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & t\in(0,1]\\ 1+\dfrac{1}{2}t, & t\in(1,2]\\ t, & \text{其它}\end{cases},$$

则$(\alpha\wedge\beta)^5$不小于 $\alpha$，故 $\alpha$ 不上于 $\beta$ 但 $\alpha^2$ 上于 $\beta$. 然而由[2]中命题 1.2 可推得下面命题.

**命题** 1.6 若 $G$ 是正规值 $l$—群，$m\neq0$，则 $ma$ 上于 $b\Leftrightarrow a$ 上于 $b$.

**推论** 1.7 $A(R)$不是正规值 $l$—群.

## §2 Saturated 子群的构造

本节中，$\forall\ \varnothing\neq M\subseteq G$，令 $C(M)=\{g\in G|g$ 是 $M$ 中某个元素的分量$\}$，$C(\{a\})$又记为 $C(a)$.

**引理** 2.1 若 $a=x+y$ 且 $x\perp y$，则 $|a|=|x|+|y|$ 且 $a\geqslant0$ 时，有 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 且 $a=x\vee y$.

**引理** 2.2 若 $x\in C(y)$且 $y\in C(a)$，则 $x\in C(a)$.

**引理** 2.3 $C(a)=\{x-y|x\in C(a^+),y\in C(a^-)\}$，$C(na)=\{nx|x\in C(a)\}$ ($\forall\ n\in Z$).

**证明** 第一式显然. 要证 $C(na)=\{nx|x\in C(a)\}$显然可设 $n>0$. 当 $a\geqslant0$ 时，$\exists\ z_1\in C(na)$，$\forall\ z_2\in z_1^{\perp}$ 使 $na=z_1+z_2$，由引理 2.1，$a=a\wedge na=a\wedge z_1+a\wedge z_2\Rightarrow a\wedge z_1\in C(a)$且 $na=n(a\wedge z_1)+n(a\wedge z_2)$，又 $na=z_1+z_2$，故由 $z_1\perp z_2$ 推得 $z_1=n(a\wedge z_1)\in\{nx|x\in C(a)\}$. 反之，$\forall\ x\in C(a)$，$\exists\ y\in x^{\perp}$ 使 $a=x+y$，则 $nx\in C(na)$. $a\ngeqslant0$ 时，$\forall\ z_1\in C(na)$，$\exists\ z_1\in z_1^{\perp}$ 使 $na=z_1+z_2$，则 $na^+=z_1^++z_2^+$，$na^-=z_1^-+z_2^-$，则 $z_1^+\in C(na^+)$，由 $a\geqslant0$ 的情形，$\exists\ z_1'\in C(a^+)$使 $z_1^+=nz_1'$，$\exists\ z_1''\in C(a^-)$使 $z_1^-=nz_1''$，则 $z_1=n(z_1'-z_1'')$，由本引理的(1)式，$z_1'-z_1''\in C(a)$，故 $z_1\in\{nz|z\in C(a)\}$.

以下 $M_1$ 表示 $C(M)$在 $G$ 中生成的子群 $S(M)$表示 $M$ 在 $G$ 中生成的 saturated 子群.

**定理** 2.5 设 $G$ 为投射 $l$—群，则$\forall\ \varnothing\neq M\subseteq G$，$S(M)=M_1$.

**证明** $\forall\, m^*=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i m_i\in M_1$，其中 $\varepsilon_i=\pm 1, m_i\in C(M)$. $\forall\, x\in C(m^*)$，$\exists\, y\in x^{\perp}$ 使 $m^*=x+y$. $G$ 是投射的 $\Rightarrow x^{\perp}\oplus x^{\perp\perp}=G$，故 $\exists\, m_i'\in x^{\perp}, m_i''\in x^{\perp\perp}$ 使 $m_i=m_i'+m_i''$，则 $m^*=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i m_i'+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i m_i''$ 又 $m^*=x+y\Rightarrow -y+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i x_i'=x-\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i x_i''\in x^{\perp}\cap x^{\perp\perp}=0$，故 $x=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i m_i''$，由引理 2.2，$m_i''\in C(M)$. 故 $x\in M_1$，故 $S(M)=M_1$.

**推论 2.6** 投射 $l$—群 $G$ 的 saturated 子群格是 $G$ 的 $l$—子群格的子格.

**引理 2.7** $\forall\, a\in G$，$\{a\}_1$ 中元素都可化成标准形式 $\sum_{i=1}^{t}n_ie_i$，其中 $n_i\in Z, e_1,\cdots,e_t\in C(a)$ 且两两正交.

**证明** $\forall\, d=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i\in\{a\}_1$，其中 $\varepsilon_i=\pm 1, d_i\in C(a)$，则 $a=d_i+d_i'(d_i\perp d_i')$. 先设 $a\geqslant 0$，对 $k$ 作归纳法. 假设 $\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i d_i$ 可化成标准形式 $\sum_{i=1}^{t_1}n_ie_i$，则

$$d=\sum_{i=1}^{t_1}n_ie_i+\varepsilon_k d_k=\sum_{i=1}^{t_1-1}n_ie_i+n_{t_1}e_{t_1}+\varepsilon_k d_k,\tag{1}$$

$e_{t_1}\in C(a)\Rightarrow a=e_{t_1}+e_{t_1}'(e_{t_1}\perp e_{t_1}')$，又 $a=d_k+d_k'$，由引理 2.1，$e_{t_1}=e_{t_1}\wedge(d_k+d_k')=e_{t_1}\wedge d_k+e_{t_1}\wedge d_k'$. 同理 $d_k=d_k\wedge e_{t_1}+d_k\wedge e_{t_1}'$. 由引理 2.2，$e_{t_1}\wedge d_k, e_{t_1}\wedge d_k', e_{t_1}'\wedge d_k\in C(a)$ 代入(1)得

$$d=\sum_{i=1}^{t_1-1}n_ie_i+\varepsilon_k(d_k\wedge e_{t_1}')+(n_{t_1}+\varepsilon_k)(d_k\wedge e_{t_1})+n_{t_1}(e_{t_1}\wedge d_k'),\tag{2}$$

(2)式的后两项与前面的项都正交，把倒数第三项与前面结合并把被结合的部分对 $d_k\wedge e_{t_1}'$ 施行同(1)式中 $d_k$ 类似的变换，则最终可将(2)式化成标准形式. 若 $a\ngeqslant 0$，由引理 2.3，$d_i=d_i'-d_i''$，其中 $d_i'\in C(a^+), d_i''\in C(a^-)$，则 $d=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i'-\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i''$，由 $a\geqslant 0$ 的情形，$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i'$ 和 $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i''$，分别可化成标准形式 $\sum_{i=1}^{t_1}n_ie_i'$ 和 $\sum_{i=1}^{t_2}n_i''e_i''$，其中 $e_i', -e_i''$ 分别是 $a^+, -a^-$ 的分量，从而都是 $a$ 的分量. 则 $d=\sum_{i=1}^{t_1}n_ie_i'+\sum_{i=1}^{t_2}n_i''(-e_i'')$ 就是 $d$ 的一个标准形式.

**定理 2.8** 若 $M$ 是 $G$ 的正交子集，则 $S(M)=M_1$.

**证明** $\forall\, d=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i\in M_1$，其中 $\varepsilon_i=\pm 1, d_i\in C(m_i), m_i\in M$. 因 $m_i\neq m_j$ 时，$m_i\perp m_j$，则

$$d=\sum_{i=1}^{t_1}n_{1i}e_{1i}+\sum_{i=1}^{t_2}n_{2i}e_{2i}+\cdots+\sum_{i=1}^{t_r}n_{ri}e_{ri},\tag{1}$$

其中 $n_{ij}\in Z, e_{pi}(i=1,2,\cdots,t_p)$ 是 $m_p$ 的分量，$m_p(p=1,2,\cdots,r)$ 是 $M$ 中互不相同(从而两两正交)的元素. 由引理 2.7，可设(1)式中 $r$ 个和式的每一个具有标准形式，即 $e_{pi}\perp e_{pj}(i\neq j)$. 又 $m_1,\cdots,m_r$ 两两正交，故 $e_{11},\cdots,e_{1t_1},\cdots,e_{r1},\cdots,e_{rt_r}$ 两两正交. $\forall\, x\in C(d)$，$\exists\, y\in x^{\perp}$ 使

$$d=x+y=(x^++y^+)-(x^-+y^-),\tag{2}$$

由引理 2.3，$e_{pi}=e_{pi}'-e_{pi}'', e_{pi}'\in C(m_p^+), e_{pi}''\in C(m_p^-)$，代入(1)得：

$$d=\sum_{\gamma=1}^{r}\sum_{i=1}^{t_\gamma}n_{\gamma i}(e'_{\gamma i}-e''_{\gamma i})=\sum_{\gamma=1}^{r}(\sum_{i=1}^{t_\gamma}n_{\gamma i}e'_{\gamma i}-\sum_{i=1}^{t_\gamma}n_{\gamma i}e''_{\gamma i}),\tag{3}$$

由引理 2.1,(3)式中各项还是两两正交. 设 $n_{\gamma 1},n_{\gamma 2},\cdots,n_{\gamma,\lambda_\gamma}>0;n_{\gamma,\lambda_\gamma+1},n_{\gamma,\lambda_\gamma+2},\cdots,n_{\gamma,t_\gamma}<0$,则由(3),

$$d=\sum_{\gamma=1}^{r}(\sum_{i=1}^{\lambda_\gamma}n_{\gamma i}e'_{\gamma i}+\sum_{i=\lambda_\gamma+1}^{t_\gamma}(-n_{\gamma i})e''_{\gamma i})-\sum_{\gamma=1}^{r}(\sum_{i=\lambda_\gamma+1}^{t_\gamma}(-n_{\gamma i})e'_{\gamma i}+\sum_{i=1}^{t_\gamma}n_{\gamma i}e''_{\gamma i}),\tag{4}$$

(4)式中前后两部分正交且都是正元,故由(2),(4):

$$d^+=x^++y^+=\sum_{\gamma=1}^{r}(\sum_{i=1}^{\lambda_\gamma}n_{\gamma i}e'_{\gamma i}+\sum_{i=\lambda_\gamma+1}^{t_\gamma}(-n_{\gamma i})e''_{\gamma i}).\tag{5}$$

则$\forall\ i=1,\cdots,\lambda_\gamma$,

$$e'_{\gamma i}=e'_{\gamma i}\wedge x^++e'_{\gamma i}\wedge y^+\,(\text{由引理 2.2},e'_{\gamma i}\wedge x^+\in C(m_\gamma));\tag{6}$$

$\forall\ i=\lambda_{\gamma+1},\cdots,t_\gamma$,

$$e''_{\gamma i}=e''_{\gamma i}\wedge x^++e''_{\gamma i}\wedge y^+\,(-e''_{\gamma i}\wedge x^+\in C(m_\gamma)).\tag{7}$$

将(6),(7)式代入(5)并利用 $x^+\wedge y^+=0$ 得: $x^+=\sum_{\gamma=1}^{r}[\sum_{i=1}^{\lambda_\gamma}n_{\gamma i}(e'_{\gamma i}\wedge x^+)+\sum_{i=\lambda_{\gamma+1}}^{t_\gamma}(-n_{\gamma i})(e''_{\gamma i}\wedge x^+)]$ $\in M$,同理 $x^-\in M$. 故 $x\in M$,从而 $M_1$ 是 saturated 子群.

**推论 2.9** $\forall\ a\in G$,$C(a)$生成的子群是 saturated 子群.

## 参 考 文 献


[1] R. N. Ball, P. Conrad and M. Darnel, *Ordered Algebraic Structure*, Lecture Notes, Vol. 99, Dekker (1985), 13—21.

[2] R. N. Ball, P. Conrad and M. Darnel, *Above and below subgroups of an l—group*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 297, 1(1986), 1—40.

[3] A. I. Kokorin and V. M. Kopytov, *Fully ordered groups*, John Wiley & Sons (1974).

[4] A. Bigard, K. Keimel and S. Wolfenstein, *Groupes et Anneaux Reticules*, Springer—Verlag (1977).

[5] P. Conrad, *Lattice—ordered Groups*, Tulane (1970).


# Construction of the Above and Below Subgroups and Saturated Subgroups of $l$-groups


*Zheng Xiqiang*

(Nanchang Institute of Aeronautical Technology)


## Abstract


In this paper, an open question on maximal above and below pairs is answered negatively and an example is given to show the incorrectness of the proof for Proposition 2.1 in [2]. Furthermore, the construction of saturated subgroup is discussed. The forms of the saturated subgroup generated by a disjoint subset in an $l$-group and the saturated subgroup generated by any subset in a projectable $l$-group are determined.