第13卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 1
1993年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1993

亚纯正半群上的同余*

曾 祥 金
(湖北荆州师专,434100)

摘 要

本文讨论了亚纯正半群 S 上特殊同余间的关系. 利用超迹和核给出了 S 上任一同余与特殊同余的关系及与群同余并的等式. 用核正规系刻画了 S 上的极大幂等分离同余,得到了 S/μ 同构于 E 的几个等价条件.

一 同余间的关系

设 S 是亚纯正半群,O_s 表示 S 上的恒等同余,ω 表示 S 上的泛同余,$\sigma=\{(a,b)\in S\times S\mid$ 存在 $e\in E$ 使 $eae=ebe\}$ 为 S 上极小群同余,由 $\lambda=\{(ef,efef)\in S\times S\mid e,f\in E\}$ 生成的同余是 S 上极小纯正同余,记为 λ^*. 由 $\delta=\{(a,b)\in S\times S\mid V(a)\cap V(b)\neq\varnothing\}$ 生成的同余是 S 上极小逆半群同余,记为 δ^*,$\mu=\{(a,b)\in S\times S\mid$ 存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$ 且对任 $e\in E$,都有 $a'ea=b'eb,aea'=beb'\}$ 是 S 上极大幂等分离同余. S 上的同余 ρ 称为带同余,若每一个 ρ—类都至少含一个幂等元. 设 R 是 S 上的 Green's 关系,易知 $I=\{(a,b)\in S\times S\mid a=xuy,b=xvy,\ (u,v)\in R,\forall\ x,y\in S^1\}^\infty$ 是 S 上包含 R 的极小带同余. S 上的同余 β 称为幂等元—纯的,如果 S 的幂等元与非幂等元在 β 下恒不等价. 显然,S 上关系 $\theta_E=\{(a,b)\in S\times S\mid a,b\in E$ 或 $a,b\in S\backslash E\}=(E\times E)\cup(S\backslash E\times S\backslash E)$ 包含了 S 上的所有幂等元—纯同余. 为给出 S 上幂等元—纯同余,先给出

定义 1.1 设 S 是亚纯正半群,K 是 S 的非空子集. 若对任意 $a\in S$,存在 $k\in K$,使 $ak\in K,ka\in K$,则称 K 是 S 的一个亚光滑子集.

设 K 是 S 的一个亚光滑子集,则 $\beta=\pi_K=\{(a,b)\in S\times S\mid xay\in K\Leftrightarrow xby\in K,\forall\ x,y\in S^1\}$ 是 S 上的幂等元—纯同余,其中 π_K 表示渗透 K 的 S 上的最大同余.

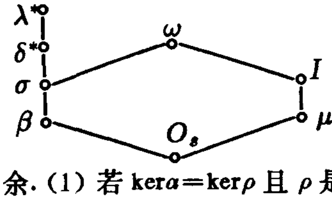
定理 1.2 设 S 是亚纯正半群,β,σ 是 S 上的幂等元—纯同余和群同余,则 $\beta\subseteq\sigma$.

定理 1.3 设 β,μ 分别表示亚纯正半群 S 上的幂等元—纯同余和幂等分离同余. 则 $\beta\cap\mu=O_s$.

下列关系是显然的:

$$\sigma\subseteq\delta^*\subseteq\lambda^*,\quad \mu\subseteq I,\quad \sigma\vee I=\omega.$$

据上面讨论,我们有右图



定理 1.4 设 S 是亚纯正半群,ρ 与 α 是 S 上的同余. (1) 若 $\ker\alpha=\ker\rho$ 且 ρ 是群同余,则 α

* 1990年9月2日收到,本文是作者在兰州大学作访问学者期间完成的.

$\subseteq\rho$； (2) 若 $\ker\alpha=\ker\rho$ 且 ρ 是幂等分离同余，则 $\rho\subseteq\alpha$； (3) 若 $\mathrm{htr}\alpha=\mathrm{htr}\rho$ 且 ρ 是带同余，则 $\alpha\subseteq\rho$； (4) 若 $\mathrm{htr}\alpha=\mathrm{htr}\rho$ 且 ρ 是幂等元一纯同余，则 $\rho\subseteq\alpha$； (5) 若 $\mathrm{htr}\alpha=\mathrm{htr}\rho$ 且 ρ 是逆半群同余，则 $\rho\subseteq\alpha$； (6) 若对任意 $e\in E$ 都有 $e\alpha\subseteq e\rho$ 且 ρ 是纯正同余，则 $\alpha\subseteq\rho$.

证明 只证(1)，(2)，(3)，其余由相应概念易证.

(1) 设 $(a,b)\in\alpha$，则 $(aa',ba')\in\alpha$，即 $ba'\in\ker\alpha=\ker\rho$. 由 ρ 是群同余，则有 $(ba')\rho=(aa')\rho$. 从而 $(ba'a)\rho=(aa'a)\rho=a\rho$. 又 $(ba'a)\rho=b\rho(a'a)\rho=b\rho$，故 $a\rho=b\rho$. 即 $(a,b)\in\rho$.

(2) 设 $(a,b)\in\rho$，则 $aa'=bb'$，$a'a=b'b$ 且 $(aa',ba')\in\rho$. 因此，$ba'\in\ker\rho=\ker\alpha$，由 ρ 是幂等分离的可推知 $(ba')\alpha=(aa')\alpha$. 从而有 $((ba'a)\alpha=a\alpha$. 又 $(ba'a)\alpha=b\alpha(a'a)\alpha=b\alpha(b'b)\alpha=b\alpha$. 故 $(a,b)\in\alpha$.

(3) 设 $(a,b)\in\alpha$，则有 $(aa',ba')\in\alpha\Rightarrow(a,ba'a)\in\alpha\Rightarrow(ab',ba'ab')\in\alpha\Rightarrow(bb',ba'ab')\in\alpha\Rightarrow(bb',ba'ab')\in\rho\Rightarrow(b,ba'ab'b)\in\rho\Rightarrow(bb',bb'a'ab'b)\in\rho\Rightarrow(bb',bb'a'ab'b)\in\alpha\Rightarrow(bb',bb'a'a)\in\alpha\Rightarrow(bb',bb'a'a)\in\rho\Rightarrow(bb',ba')\in\rho\Rightarrow(bb'aa',bb'a'a)\in\rho\Rightarrow(bb'aa',bb'a'a)\in\alpha\Rightarrow(aa',bb'a'a)\in\alpha\Rightarrow(aa',bb'a'a)\in\rho\Rightarrow(aa',bb')\in\rho\Rightarrow(a,b)\in\rho$.

定理 1.5 设 ρ 是亚纯正半群 S 上任一同余，σ 是 S 上群同余，则 $\sigma\vee\rho=\sigma\circ\rho\circ\sigma$.

证明 显然，$\sigma\circ\rho\circ\sigma\subseteq\sigma\vee\rho$. 下证 $\sigma\vee\rho\subseteq\sigma\circ\rho\circ\sigma$. 只需证 $\sigma\circ\rho\circ\sigma$ 是传递的. 设 (x,y)，$(y,z)\in\sigma\circ\rho\circ\sigma$，则存在 $a,b,c,d\in S$，使得 $(x,a)\in\sigma$，$(a,b)\in\rho$，$(b,y)\in\sigma$；$(y,c)\in\sigma$，$(c,d)\in\rho$，$(d,z)\in\sigma$. 由 σ 的传递性知 $(b,c)\in\sigma$. 故存在 $e\in E$，使 $ebe=ece$. 又由 $(a,b)\in\rho$ 知 $(eae,ebe)\in\rho$，$(c,d)\in\rho$ 知 $(ece,ede)\in\rho$. 从而有 $(eae,ede)\in\rho$. 又 $(x,a)\in\sigma$ 和 $(a,eae)\in\sigma$（σ 是群同余，$e\sigma$ 是 S/σ 的单位元）知 $(x,eae)\in\sigma$. 又由 $(d,z)\in\sigma$ 和 $(d,ede)\in\sigma$ 可知 $(ede,z)\in\sigma$. 这时有 $(x,eae)\in\sigma$，$(eae,ede)\in\rho$，$(ede,z)\in\sigma$. 从而有 $(x,z)\in\sigma\circ\rho\circ\sigma$. 故 $\sigma\vee\rho=\sigma\circ\rho\circ\sigma$.

二 S 上极大幂等分离同余的刻画

命题 2.1[9] 设 S 是正则半群，$a'\in V(a)$，$b'\in V(b)$，$g\in S(a'a,bb')$. 则 $b'ga'\in V(ab)$.

命题 2.2[2] 亚纯正半群的同态象是亚纯正的.

定义 2.3 设 σ 是从半群 S 到半群 T 的一个映射. 如果 σ 满足下列条件(1) σ 是双射；(2) 对任意 $a,b\in S$，都有 $(ab)\sigma=(b\sigma)(a\sigma)(b\sigma)$，则称 σ 是亚同构映射且称 S 和 T 是亚同构的. 记为 $S\underset{\sim}{\overset{\sim}{-}}T$.

定义 2.4 设 S 是亚纯正半群，称 $N(E)=\{a\in S\,|\,a'ea=aa'eaa',\exists\ a'\in V(a)\text{ 且 }\forall\ e\in E\}$ 为 E 的在 S 中的亚中心化子.

当 $e\leqslant aa'$ 时，显然有 $N(E)=\{a\in S\,|\,a'ea=e,\exists\ a'\in V(a)\text{ 且对每一个 }e\leqslant aa'\}$. 这时称 $N(E)$ 为正则半群 S 中 E 的中心化子.

由 $N(E)$ 的定义不难证明下列命题：

命题 2.5 设 S 是亚纯正半群，$N(E)$ 是亚中心化子，$a\in N(E)$，则

(1) 存在 $a'\in V(a)$ 使 $a'\in N(E)$；

(2) $E\subseteq N(E)$；

(3) 存在 $a'\in V(a)$ 使 $a'a=aa'$.

当 S 是 R—幂么(L—幂么,可逆)半群时有

$$N(E)=\{a\in S\mid aea'=aa'e,\exists\ a'\in V(a),\forall\ e\in E\}$$

$(N(E)=\{a\in S\mid a'ea=ea'a,\exists\ a'\in V(a),\forall\ e\in E\},N(E)=\{a\in S\mid ae=ea,\forall\ e\in E\})$

下面给出极大幂等分离同余的刻画.

引理 2.6 设 S 是正则半群,$a,b\in S$.若存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$,使 $a'a=b'b\overset{d}{=}e,aa'=bb'\overset{d}{=}f$,则 $a'b,b'a\in\mathscr{H}_e,ab',ba'\in\mathscr{H}_f$.

证明 由条件易证.

引理 2.7 设 S 是亚纯正半群,μ 是 S 上极大幂等分离同余.若 $a,b\in S,(a,b)\in\mu$,则存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$.使得 $ab',a'b,b'a,ba'\in N(E)$.

证明 设 $(a,b)\in\mu$,则存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$,使 $aa'=bb',a'a=b'b$.令 $g\in S(a'a,b'b)$,则 $bga'\in V(ab)$.

又 $(ab')(bga')e(ab')(bga')=ab'bga'eab'bga'=aa'aga'aa'eaa'aga'=aa'ab'ba'eaa'aga'aa'=aa'aa'eaa'=ab'ebb'ba'=ab'eba'=aa'ab'bb'eba'=bb'aa'aa'eaa'=bb'aa'eaa'=bb'bb'bb'eaa'=bb'bgb'bb'ebb'=bga'ab'ebb'=(bga')(aa')eab'=(bga')e(ab')$,对任意 $e\in E$ 都成立.故 $ab'\in N(E)$.类似可证 $a'b,ba',b'a\in N(E)$.

定理 2.8 设 S 亚纯正半群,$N(E)$是 E 在 S 中的亚中心化子.则 $(a,b)\in\mu$ 的充要条件是存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$使得 $a'a=b'b,aa'=bb'$ 且 $ab'\in N(E),a'b\in N(E)$.

证明 由引理 2.7 知必要性成立.下证充分性成立.若存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$使 $aa'=bb',a'a=b'b$ 且 $a'b\in N(E),ab'\in N(E)$.令 $g\in S(a'a,b'b)$.则 $bga'=ba'\in V(ab')$.

又 $a'ea=a'aa'aa'eaa'a=a'ab'ba'eaa'a=a'agb'ba'eab'b=b'bga'aa'eab'b=b'(bga')e(ab')b=b'(ab')(bga')e(ab')(bga')b=b'ab'bga'aa'eab'bga'aa'b=b'ab'ba'aa'eab'ba'aa'b=b'aa'aa'aa'eaa'aa'aa'b=b'aa'eaa'b=b'bb'ebb'b=b'eb$,对任意 $e\in E$ 都成立.类似地可证 $aea'=beb'$.从而 $(a,b)\in\mu$.定理得证.

作为定理 2.8 的推论,不难证明

推论 2.9 设 S 是正则半群,则 $(a,b)\in\mu$ 当且仅当存在 $a'\in V(a),b'\in V(b)$使 $aa'=bb',a'a=b'b$ 且当 $e\leqslant aa'$ 时 $ab'\in N(E),f\leqslant a'a$ 时 $a'b\in N(E)$.其中 $N(E)$为 E 在正则半群 S 中的中心化子.

推论 2.10 设 S 是 R—幂么(L—幂么,可逆)半群.则 $(a,b)\in\mu$ 当且仅当存在 $a'\in V(a)$,$b'\in V(b)$使 $aa'=bb'(a'a=b'b,a^{-1}a=b^{-1}b)$且 $a'b\in N(E)(ab'\in N(E),ab^{-1}\in N(E))$.其中 $N(E)$分别表示相应半群上的中心化子.

推论 2.11 设 S 是亚纯正半群,μ 是 S 上的极大幂等分离同余,则 $N(E)=\bigcup\limits_{e\in E}(e\mu)$.进而可知 $N(E)$是 μ 的核正规系.

推论 2.12 (1) 若 S 是纯正半群,则 $N(E)=\bigcup\limits_{e\in E}(e\mu)$是群带;

(2) 若 S 是 R—幂么(L—幂么)半群,则 $N(E)$是一个群的左(右)正则带;

(3) 若 S 是可逆半群,则 $N(E)$是群并.

三　$N(E)$的特殊情形

本节研究 $N(E)=S$ 和 $N(E)=E$ 的情形，只给出下列结果. 由相应概念这些结果均可证明.

定理 3.1　设 S 是纯正半群，则下列命题等价：

(1)　$N(E)=S$. (2)　$S/\mu\cong E$. (3)　S 是群的带.

推论 3.2　若 S 是 R—幂么(L—幂么，可逆)半群，则下列命题等价：

(1)　$N(E)=S$. (2)　$S/\mu\cong E$. (3)　S 是群的左正则带(右正则带，并).

定理 3.3　设 S 是亚纯正半群，则 μ 是 S 上恒等同余当且仅当 $N(E)=E$.

定理 3.4　设 S 是任一亚纯正半群，μ 是 S 上极大幂等分离同余. 则

$$E(S/\mu) = N(E(S/\mu)).$$

参 考 文 献

[1]　Masat F E, *Right group and group congruences on a regular semigroup*, Duke Math. J. 1973, Vol 40, 393—402.

[2]　Masat F E, *Congruences on conventional semigroups*, Czechoslovak Math. J. 1981, 31(106), 199—205.

[3]　Pastijn F and Petrich M, *Congruences on regular semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. (1986) 607—633.

[4]　Clifford A H and Preston G B, *The algebraic theory of semigroup*, Math Surveys, No 7. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. 1961, Vol. I 27—35, 1967, Vol. , 631—652.

[5]　Reilly N R and Scheiblich H E, *Congruences on regular semigroups*, Pacific J. Math. 1967, Vol 23. 349—360.

[6]　Hall T E, *On regular semigroups*, J. Algebra, 1973. (24) 1—24.

[7]　Gomes Gracinda M S, *Orthodox congruences on regular semigroups*, Semigroup Forum, Vol 37(1988). 149—166.

[8]　Howie J M, *An Introduction to Semigroup Theory*, London Academic Press, 1976, 186—210.

[9]　Nambooripad K S S, *Structure of regular semigroup*, Mem. Amer. Math. Soc. 1979, (22) no. 224. 36—58.

(7)

Congruences on Metaorthodox Semigroups

Zeng Xiangjin

(Dept. of Math., Jingzhou Teachers College)

Abstract

We introduce some new congruences on a metaorthodox semigroup and discuss their relationship. By use of the concept of hyper-trace and kernel we also discuss the relations between any congruence and special congruence on S. Moreover, it describes the maximum idempotent-separating congruence on S, and gets a few conditions of equivalence that $S/\mu\cong E$.