第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

一般环之因子幂零理想*

黄惜阴
(天津教育学院)

摘要

本文称环Ω的左(右)理想A为因子幂零的,如果对于任意元素$r\in\Omega$,均有正整数$m=m(r)$,使得$A^m r=\{0\}$.称Ω的一个左理想L为关于元素$b\in\Omega$的左因子,如果$Lb\neq\{0\}$.

定理4 设R是环Ω的因子幂零右理想,那么$R+\Omega R$是Ω的一个因子幂零理想.

定理7 设Ω具有局部左因子极小条件,那么Ω的任意诣零左理想必是因子幂零左理想.

本文指出因子幂零性是介于幂零性与诣零性之间的一种性质,更接近幂零性.

本文恒设Ω为结合环.

定义1 称环Ω的左(右)理想A为因子幂零的,如果对于任意元素$r\in\Omega$,均有正整数$m=m(r)$,使得$A^m r=\{0\}$.使此式成立的最小正整数m,叫做关于r的因子幂零指数.

易见,一个环的幂零左(右)理想必是因子幂零左(右)理想.因子幂零左(右)理想必是诣零左(右)理想.因子幂零性是同态不变性.容易证明

命题1 环Ω的因子幂零左(右)理想A是幂零的充分必要条件是对于任意元素$r\in A$,A关于r的因子幂零指数有界.

定理1 环Ω的非零的因子幂零(右)理想,恒含Ω的非零幂零(右)理想.

证明 设A是Ω的非零的因子幂零(右)理想.令

$$B_m=\{a\,|\,A^m a=\{0\},\ a\in A\},$$

则B_m是Ω的幂零(右)理想.

事实上,显然B_m非空,且易验证B_m为Ω的子环,对于任意元素$r\in\Omega$,$a\in B_m$,有

$A^m a=\{0\}$,

$A^m ar=\{0\}$, $ar\in A$ (当A为右理想),

$A^m ra\subseteq A^m a=\{0\}$, $ra\in A$ (当A为理想).

故B_m是Ω的(右)理想.

由于A是因子幂零的,自然B_m也是因子幂零的.且对于任意$a\in B_m$,B_m关于a的因子幂零指数有界,由命题1,即知B_m是Ω的幂零(右)理想.因A是非零的,故总有适当的正整数m,使得B_m非零.

定理2 环Ω的任一因子幂零(右)理想,必为Ω之若干个幂零(右)理想之和与并.

* 1990年12月26日收到.

证明 如定理 1,令

$$B_m = \{a | A^m a = \{0\},\ a \in A\},$$

则 $A = \sum\limits_m B_m = \bigcup\limits_m B_m$,$B_m$ 是幂零的.

命题 2 设 A_1,A_2 都是 Ω 的因子幂零(左、右)理想,则 A_1A_2 也是 Ω 的因子幂零(左、右)理想.

证明 $(A_1A_2)^m \subseteq A_2^m$ (A_1,A_2 为左理想), $(A_1A_2)^m \subseteq A_1^m$ (A_1,A_2 为右理想).

命题 3 设 A_1,A_2 都是 Ω 之因子幂零(左、右)理想,则 $A_1 \cap A_2$ 亦然.

命题 4 设 R 是环 Ω 的因子幂零右理想,则 ΩR 是 Ω 的因子幂零理想.

证明 由 $(\Omega R)^n = \Omega(R\Omega)\cdots(R\Omega)R \subseteq \Omega R^n$ 即知.

定理 3 设 A_1,A_2 都是环 Ω 的因子幂零(右)理想,那么 A_1+A_2 亦为 Ω 的因子幂零(右)理想.

证明 首先注意对于任意正整数 $k \geqslant 2$,有

$$(A_1 + A_2)^k = A_1^k + A_2^k + \Sigma \cdots A_1 \cdots A_2 \cdots,$$

其中 Σ 中每项均含因子 A_1 与 A_2,且或者 A_1 的个数 $\geqslant k/2$,或者 A_2 的个数 $\geqslant k/2$.

对于任意 $r \in \Omega$,由于 A_1,A_2 都是因子幂零的,故有正整数 m,n 使得 $A_1^m r = \{0\}$,$A_2^n r = \{0\}$. 现取 $k = mn$,则由 A_1,A_2 是右理想,易知

$$(A_1 + A_2)^k r = \{0\}.$$

定理 4 设 R 是环 Ω 的因子幂零右理想,那么 R 在 Ω 中所生成的理想 $R+\Omega R$ 是因子幂零的.

证明 由命题 4,定理 3 立即可得.

由命题 1 易知,下面的定理是定理 4 的一个特例:

定理 A 环 Ω 的幂零右理想 R 在 Ω 中所生成的理想 $R+\Omega R$ 是幂零的.

命题 5 设 Ω 为质环,则 Ω 不含非零的因子幂零理想.

证明 因质环不含非零幂零理想,由定理 1 即知命题成立.

定理 5 环 Ω 的任意因子幂零理想恒含于 Ω 的 Baer 根之中,从而恒为半幂零的.

证明 设 A 为 Ω 的任一因子幂零理想,N_B 为 Ω 的 Baer 根. 由于因子幂零性是同态不变性,理想 A 在自然同态 $\Omega \sim \Omega/N_B$ 下的同态象 A^* 仍为因子幂零的,那么 A^* 必为 0^*. 否则,A^* 为非零的因子幂零理想,由定理 1 知 A^* 含非零幂零理想,矛盾. 故 $A \subset N_B \subset N_L$,此处 N_L 为 Ω 的 Levitzki 根,证毕.

熟知一个环 Ω 的 Baer 根 N_B,可以刻画为具有下一性质的 Ω 的理想 M 的交:"Ω/M 不含非零的幂零理想."类此,注意到定理 1,我们可以得到 Baer 根的另一刻画,即有

定理 6 设 N_B 为环 Ω 的 Baer 根. 则 N_B 为具有下一性质的 Ω 的理想 M 的交:"Ω/M 不含非零的因子幂零理想."

定义 2 设 L 为 Ω 的一个左理想,a 为 Ω 的一个元素. 如果 $La \neq \{0\}$,则称 L 为关于元素 a 的一个左因子.

定义 3 称环 Ω 具有局部左因子极小条件,如果关于同一元素的任一组左因子中均有极小者.

定理 7 设环 Ω 具有局部左因子极小条件,那么 Ω 的任意诣零左理想必是因子幂零左理想.

证明 设 L 为环 Ω 的一个诣零左理想. 如果 L 不是因子幂零的,那么必存在元素 $b\in\Omega$,使得对于任意正整数 m,均有 $L^m b\neq\{0\}$. 从而知 $L^m(m\geqslant 1)$ 都是关于 b 的左因子,由局部左因子极小条件知降链

$$L\supseteq L^2\supseteq\cdots\supseteq L^s\supseteq\cdots$$

必止于有限处. 即存在正整数 k,使得

$$L^k=L^{k+1}=\cdots\neq\{0\}.$$

且 $L^k b=L^{k+1}b=\cdots\neq\{0\}$. 令 $L_0=L^k$,则

$$L_0=L_0^2=\cdots\neq\{0\},$$

$$L_0 b=L_0^2 b=\cdots\neq\{0\}.$$

设使 $L_0Xb\neq\{0\}$ 成立且含于 L_0 关于元素 b 的诸左因子 X 当中的极小者为 L^*,那么 $L_0L^*b\neq\{0\}$. 所以存在元素 $a\in L^*$,使得

$$L_0ab\neq\{0\}.$$

因为 $L_0(L_0a)b=L_0^2ab=L_0ab\neq\{0\}$,所以 L_0a 也是含于 L_0 的满足 $L_0Xb\neq\{0\}$ 的关于 b 的左因子. 又 $a\in L^*$,$L_0a\subseteq L^*$,由 L^* 之极小性可知

$$L^*=L_0a.$$

于是存在元素 $x\in L_0$(设其诣零指数为 S),使

$$a=\chi a=\cdots=\chi^s a=0.$$

此与 $L_0ab\neq\{0\}$ 矛盾. 故 L 是因子幂零的,证毕.

设 L 为 Ω 的诣零左理想,如果 Ω 具有左理想极小条件,那么 Ω(除零乘环外)自然具有局部左因子极小条件,从而 L 是因子幂零的. 对于任意 $b\in\Omega$,有正整数 $m=m(b)$,使得 $L^m b=\{0\}$. 由左理想极小条件知存在正整数 k,使得

$$L^k=L^{k+1}=\cdots,$$

从而对任意元素 $b\in L$,L 关于 b 的因子幂零指数有界. 由命题 1 即可推得熟知的经典结果:

定理 B 具有左理想极小条件的环的任意诣零左理想必是幂零左理想.

可以指出,如在定义 1 中以式子 $rA^m=\{0\}$,代替 $A^m r=\{0\}$;在定义 2 中以右因子代替左因子,则可得到与定理 4,定理 7 相对称的结果:

定理 4′ 设 L 是环 Ω 的因子幂零左理想,那么 L 所生成的理想 $L+L\Omega$ 是因子幂零的.

定理 7′ 设 Ω 具有局部右因子极小条件,那么 Ω 的任意诣零右理想必是因子幂零右理想.

由以上一系列结果可以看到,因子幂零性是极为接近幂零性的. 下面我们将引用例子说明因子幂零性不同于幂零性,亦不同于诣零性,从而得到如下关系:

幂零性→因子幂零性→半幂零性→诣零性. 但箭头均不能反向. 另外,因子幂零性与诣零指数有界性却互不蕴含.

熟知 Baer[1] 构造了一个半幂零环,不含非零的幂零理想. Golod, E. S. 又构造了一个诣零环而非半幂零环,朱孝璋[2]构造了一个环恰是因子幂零环而非幂零环的,且非诣零指数有界的. 谢邦杰[3]构造了一个上指数为 2 的理想子环,不是幂零的,也不是因子幂零的.

由于因子幂零性与幂零性有区别，所以引入下面的定理是有意义的.

定理 8 设环 Ω 具有局部左因子极小条件，那么 Ω 的所有因子幂零理想的并 N，是 Ω 的一个最大因子幂零理想. N 也恰为 Ω 的所有幂零理想之并. Ω/N 不含非零的因子幂零理想.

证明 任取 a、$b\in N$，那么存在因子幂零理想 A、B，使 $a\in A$，$b\in B$. 由定理 3，$A+B$ 仍为因子幂零的. 从而易知 N 为诣零理想. 由定理 7 知 N 为因子幂零理想，是 Ω 的最大的因子幂零理想. 由于幂零理想是因子幂零的，再由定理 2 知 N 恰为 Ω 之所有幂零理想之并.

因 Ω/N 不含非零的因子幂零理想，我们称 N 为具有局部左因子极小条件的环 Ω 的根. 根为零的环称为半单纯的环. 因 Ω 具有局部左因子极小条件，则 Ω/N(除 $\Omega/N=\{0^*\}$外)亦具有局部左因子极小条件，从而 Ω/N 就是半单纯的.

参 考 文 献

[1] Baer, R., Amer. J. Math., 76(1943), 100—125.

[2] 朱孝璋，蔡传仁，具有主右理想极小条件的诣零环，扬州师院自然科学学报，2(1985)，2—5.

[3] 谢邦杰，一般环之局部有界理想，东北人民大学学报，1(1955)，13—35.

Factor-nilpotent Ideal of Rings

Huang Xiyin
(Tianjin College of Education)

Abstract

Let Ω be a ring. A left (right) ideal A of Ω is called factor-nilpotent if there is a positive integer $m=m(r)$ with $A^m r=\{0\}$ for every element $r\in\Omega$. A left ideal L of Ω is called a left factor for an element $b\in\Omega$, if $Lb\neq\{0\}$. Ω is called a ring with locally minimum condition for left factors, if in Ω every descending chain of left factors for the same element is finite. Here we show that

1 Let R be a factor-nilpotent right ideal of Ω. Then $R+\Omega R$ is a factor-nilpotent ideal of Ω.

2 Let Ω be a ring with locally minimum condition for left factors. Then every nil left ideal of Ω is a factor-nilpotent left ideal.