第13卷第1期 1993年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 1 Feb. 1993

环上矩阵环的导子*

邓 清
(西南师范大学,重庆 630715)

文[1]讨论了除环上2阶全矩阵环的导子的一些性质,本文继此讨论一般结合环 R 上的 n 阶全矩阵环 R_n 的导子的性质.

环 R 的加群自同态 d 称为 R 的导子,若对 x、$y\in R$,有 $d(xy)=xd(y)+d(x)y$. 如下总假定 R 有单位元,且用 R_n 表示 R 上的 n 阶全矩阵环,E_{ij} 表示 (i,j) 位置元素为 R 的单位元 1 其余元素为零的 R_n 的矩阵单位,xE 表示对角线上元素为 x 的数量阵.

引理 1 d 为 R_n 的导子,则 $d(E_{ij})$ 必为如下形式

$$d(E_{ij})=\begin{pmatrix} & & & a_{1j} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{ij-1}, & a_{ij}, & a_{ij+1}, & \cdots, & a_{in} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & a_{nj} & & & \end{pmatrix},$$

其中 $i=j$ 时,$a_{ij}=0$;$i\neq j$ 时,$d(E_{ij})$ 中除 a_{ij} 外,第 i 行元素恰为 $d(E_{jj})$ 的第 j 行的对应元素,第 j 列的元素恰为 $d(E_{ii})$ 的第 i 列对应元素.

证明 设 $d(E_{ii})=(x_{ij})$,因 $E_{ii}^2=E_{ii}$,故有

$$d(E_{ii})=E_{ii}d(E_{ii})+d(E_{ii})E_{ii}.$$

比较两端对应元素可得

$$d(E_{ii})=\begin{pmatrix} & x_{1i} & \\ & \vdots & \\ x_{i1}\cdots & 0 & \cdots x_{in} \\ & \vdots & \\ & x_{ni} & \end{pmatrix}.$$

当 $i\neq j$ 时,令 $d(E_{ij})=(y_{ij})$,因 $E_{ij}=E_{ii}E_{ij}$,两端取导子 d,可算得

$$\begin{array}{cc} d(E_{ij})=\begin{pmatrix} & x_{1i} & \\ & \vdots & \\ y_{i1}\cdots & y_{ij} & \cdots y_{in} \\ & \vdots & \\ & x_{ni} & \end{pmatrix} & (i\text{ 行}), \\ (j\text{ 列}) & \end{array}$$

其中 $(x_{1i}\cdots x_{ni})$ 为 $d(E_{ii})$ 中的第 i 列元素. 同样,利用 $E_{ij}=E_{ij}E_{jj}$ 可算得,$d(E_{ij})$ 中第 i 行元素除 y_{ij} 外,其余元素恰为 $d(E_{jj})$ 的第 j 行对应元素.

引理 2 对 $x\in R$,有

* 1990年12月19日收到.

$$d(xE)=\begin{pmatrix} a_{11}, & [x,c_{12}], & \cdots, & [x,a_{1n}] \\ [x,a_{21}], & a_{22}, & \cdots, & [x,a_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [x,a_{n1}], & [x,a_{n2}], & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中第 i 行的元 $a_{ik}(k\neq i)$ 为 $d(E_{ii})$ 的第 i 行的对应元素，而第 j 列中的 $a_{kj}\ (k\neq j)$ 恰为 $d(E_{jj})$ 的第 j 列对应元素的反号（$-a_{kj}$ 为 $d(E_{jj})$ 的 (k,j) 处元素）.

证明 首先，从 $E_{ii}E_{jj}=0\ (i\neq j)$ 两端求导可算出，$d(E_{ii})$ 的 (i,j) 处元素与 $d(E_{jj})$ 的 $i,j)$ 处元素相差一个符号.

设 $d(xE)=(x_{ij})$，因 $(xE)E_{ii}=E_{ii}(xE)$，两边取导子 d 可得

$$\begin{pmatrix} xa_{1i}+x_{1i} \\ \cdots\cdots \\ xa_{i1},\cdots,x_{ii},\cdots,xa_{in} \\ \cdots\cdots \\ xa_{ni}+x_{ni} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1i}x \\ \cdots\cdots \\ a_{i1}x+x_{i1},\cdots,x_{ii},\cdots,a_{in}x+x_{in} \\ \cdots\cdots \\ a_{ni}x \end{pmatrix}.$$

比较两端有

$$x_{ik}=[x,a_{ik}],\quad (k\neq i),$$
$$x_{ki}=[x,-a_{ki}],\quad (k\neq i),$$

其中 a_{ik} 为 $d(E_{ii})$ 的第 i 行对应元素，a_{ki} 为 $d(E_{ii})$ 的第 i 列对应元素.

在下面的讨论中，我们就 a_{ij} 按引理 2 的意义确定下来.

引理 3 $a_{ii}=a_{11}+[x,b_{1i}]$，$(i>1)$，其中 a_{ii} 如引理 2 所述，b_{1i} 为 $d(E_{1i})$ 的 $(1,i)$ 处元素.

证明 因 $E_{1i}(xE)=(xE)E_{1i}$，取导子 d 然后比较两端 $(1,i)$ 处元素可得.

有了以上准备，我们有

定理 1 d 为 R_n 的导子，则存在 $a_{ij},b_{1j}\in R$ 及 R 的导子 f，使

$$d(xE)=\begin{pmatrix} f(x), & [x,a_{12}], & \cdots, & [x,a_{1n}] \\ [x,a_{21}], & f(x)+[x,b_{12}], & \cdots, & [x,a_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [x,a_{n1}], & [x,a_{n2}], & \cdots, & f(x)+[x,b_{1n}] \end{pmatrix}.$$

证明 在引理 2 及引理 3 中令 $f(x)=a_{11}$，则只须证 f 为 R 的导子.

因 $d((x+y)E)=d(xE)+d(yE)$，且 $[x+y,a_{ij}]=[x,a_{ij}]+[y,a_{ij}]$，故比较对角线上元素有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

又 $d(xyE)=d(xE\cdot yE)=(xE)d(yE)+d(xE)(yE)$，即有

$$\begin{pmatrix} f(xy), & [xy,a_{12}], & \cdots, & [xy,a_{1n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [xy,a_{n1}], & [xy,a_{n2}], & \cdots, & f(xy)+[xy,b_{1n}] \end{pmatrix}=.$$

$$\begin{pmatrix} xf(y), & x[y,a_{12}], & \cdots, & x[y,a_{1n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x[y,a_{n1}], & x[y,a_{n2}], & \cdots, & xf(y)+x[y,b_{1n}] \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f(x)y, & \cdots, & [x,a_{1n}]y \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [x,a_{n1}]y, & \cdots, & f(x)y+[x,b_{1n}]y \end{pmatrix},$$

而$[xy,a_{ij}]=x[y,a_{ij}]+[x,a_{ij}]y$，故

$$f(xy)=xf(y)+f(x)y,$$

从而f为R的导子.

由定理1知，R_n的每一导子可唯一决定R的一导子，两者之间还有如下关系：

定理2 d为R_n的导子，f由d所确定的(按定理1)导子，则d为R_n的内导当且仅当f为R的内导.

证明 若d为R_n的由(r_{ij})导出的内导，则

$$d(xE)=(xE)(r_{ij})-(r_{ij})(xE)=x(r_{ij})-(r_{ij})x.$$

由定理1，$f(x)=[x,r_{11}]$，故$f(x)$为r_{11}导出的R的内导.

反之，若$f(x)=[x,r]$，令

$$T=\begin{pmatrix} r, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & r+b_{12}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & r+b_{1n} \end{pmatrix},$$

其中a_{ij}、b_{1j}为引理2及引理3中所述. 作

$$\delta(X)=[X,T],\quad \forall\ X\in R_n.$$

下证$\delta=d$. 因

$$\delta(E_{ij})=E_{ij}T-TE_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} & -a_{1i} & \\ & \cdots\cdots & \\ a_{j1},\cdots, & b_{ij}-b_{1i}, & \cdots a_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ & -a_{ni} & \end{pmatrix}(i\text{ 行}),\\ (j\text{ 列})\end{array}$$

由于$E_{1i}E_{ij}=E_{1j}$，两端取导子d可得，$d(E_{ij})$的(i,j)处元素为$b_{1j}-b_{1i}$，再由a_{ij}的定义及引理1知，

$$\delta(E_{ij})=d(E_{ij}),\tag{1}$$

而$\forall\ X=(x_{ij})\in R_n$，有

$$X=\sum_{i,j}x_{ij}E_{ij}=\sum_{i,j}(x_{ij}E)E_{ij},$$

$$d(X)=\sum_{i,j}(x_{ij}E)d(E_{ij})+\sum_{i,j}d(x_{ij}E)E_{ij},\tag{2}$$

$$\delta(X)=\sum_{i,j}(x_{ij}E)\delta(E_{ij})+\sum_{i,j}\delta(x_{ij}E)E_{ij}.\tag{3}$$

且$\forall\ x\in R$有

$$\delta(xE)=\begin{pmatrix} f(x), & [x,a_{12}], & \cdots, & [x,a_{1n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [x,a_{n1}], & [x,a_{n2}], & \cdots, & f(x)+[x,b_{1n}] \end{pmatrix}=d(xE).\tag{4}$$

由(1)－(4)式，知，$d(X)=\delta(X)$，即$\delta=d$为内导.

定理3 d为R_n的导子，则$d(xE)=f(x)E$，当且仅当$d(E_{ij})$的元素都在$Z(R)$中，$i,j=1,$

$\cdots, n$.

证明 充分性由引理 2、3 即得.

必要性. 因 $d(xE)=f(x)E$, 故 $a_{ij}, b_{ij}\in Z(R)$, 由引理 2、3 及定理 2 的证明知, $d(E_{ij})$ 的元素必为某些 a_{ij}, b_{ij} 或其反号, 从而 $d(E_{ij})$ 的元素在 $Z(R)$ 中.

定理 3 说明, R_n 的导子 d 限制在其子环 $A=\{xE\mid x\in R\}$ 上不变, 对 d 是须做较强的要求的, 这一要求恰好是 R 的导子 f 能扩张成 R_n 的导子的条件.

参 考 文 献

[1] J. Bergen, I. N. Herstein and C. Lanski, *Derivations with invertible values*, Canad. J. Math., 35(2) (1983) pp. 310—320.

Derivations of the Full Matrix Rings over a Ring

Deng Qing

(Dept. of Math., Southwest China Teachers Univ., Chongqing)

Abstract

Let R be a ring with identity. Let R_n denote the full matrix ring over R and d be a derivation of R_n. In this note, it is shown that each derivation d of R_n may determine a derivation f of R such that $d(xE)$ can be expressed by f for every x in R(E be the unity of R_n). Moreover, the relations between d and f are discussed. In particulat, a necessary condition for a derivation of R to be extendable to one of R_n's is given.