第13卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 1
1993年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1993

态族带序结构的范畴*

陈 焕 艮
(南京大学数学系,210008)

范畴的态族可以赋予一些结构,如 Ab 范畴,但在自然界中我们大量接触的是连续现象,作为现代分析的基础,连续是用序关系处理的. 因此,本文赋予范畴的态族一个序结构,引进了带序范畴和正序函子,以此作为连续性的一种范畴描述. 如范畴 C 带 T_0 拓扑,若$\forall\ U_{fg}$,$\exists\ U_f$,U_g,使得 $U_{fg}=U_f\cdot U_g$. 则按开集的一种包含关系即构造出带拓扑的范畴上的序结构,从而在拓扑问题的研究中引进了代数概念和方法,对问题有一个新的认识. 本文的目的是用代数方法描述带连续结构的范畴.

§1 带序范畴

定义 1 范畴 C 称为带序$\prec$范畴,如果它的平行矢间有一结构$\prec$,满足:(1) $f\prec f$,$\forall\ f\in \mathrm{Arr}C$;(2) $f\prec g,g\prec f\Rightarrow f=g$;(3) $f\prec g,g\prec p\Rightarrow f\prec p$;(4) 只要复合有意义,则$\forall\ h,k\in \mathrm{Arr}C$,$f\prec g\Rightarrow fh\prec gh,kf\prec kg$.

例 1 群 Z 范畴. 对象是整数加群 Z,矢量为 Z 中每个元素,复合运算为 Z 中加法. 定义 $m\prec n$ 表示 $m\leqslant n$,则 Z 成为带序范畴.

例 2 任何范畴都带平凡序关系$\prec$:$f\prec g$ 表示 $f=g$.

例 3 设 B 为带序$\prec_1$范畴,则 B^c 为带序$\prec$范畴,这里 $m\prec n$ 表示 $m_c\prec_1 n_c$,$\forall\ c\in \mathrm{Ob}C$.

下面列举带序范畴的一些基本性质:

1　只要复合有意义,则:$f\prec g$,$m\prec n\Rightarrow fm\prec gn$.

2　范畴 C 带序$\prec$,则带序$\prec_1$,这里 $f\prec_1 g$ 表示 $g\prec f$.

3　带序范畴 C 的子范畴带相同的序.

4　设函子 $S:A\to B$,带序$\prec$范畴 A 的象 SA 带序$\prec_1$,其中:$Sf\prec_1 Sg$ 表示 $f\prec g$.

5　设 A、B 为带序$\prec_1$,$\prec_2$范畴,则 $A\times B$ 带序$\prec$,其中$(f,g)\prec(h,k)$表示 $f\prec_1 h,g\prec_2 k$.

6　设 $E\xrightarrow{T}C\xrightarrow{S}D$,$C$ 为带序$\prec$范畴,则逗点范畴$(T\downarrow S)$带序$\prec_1$,其中$\langle k,h\rangle\prec_1\langle m,n\rangle$表示 $f\prec g,f'\prec g'$. 这里$\langle k,h\rangle:\langle e_1,d_1,f\rangle\to\langle e_1',d_1',f_1\rangle$;$\langle m,n\rangle:\langle e_2,d_2,g\rangle\to\langle e_2',d_2',g'\rangle$. 对逗点范畴$(b\downarrow C)$,$(b\downarrow S)$有类似结论.

§2 正序函子

* 1990年11月15日收到.

下文中范畴均为带序范畴，在不致引起误解时，均以$\prec$表之.

定义 2 函子 $S:C\to D$ 称为正序函子，如果：$\forall$ 平行矢 f,g $(f\prec_1 g\Leftrightarrow Sf\prec_2 Sg)$.

显然恒等函子、包含函子、投影函子都是正序的，而守信函子都视为平凡序下正序的.

首先说明一下，给定函子 $F:C\to D$，总可按下述方式构造正序函子. 取 C 中合同关系 $R:fRg$ 表示 $\mathrm{dom}f=\mathrm{dom}g,\mathrm{cod}f=\mathrm{cod}g,Ff=Fg$. 由商范畴知，$\exists\,!\,F^*$，使得有 $F^*Q_R=F$，这里 $Q_R:C\to C/R$ 为泛函子. 且$\forall\ [f]\in \mathrm{Ob}C/R,F^*[f]=Ff$，易证 $F^*:C/R\to D$ 为守信函子.

设范畴 D 带序$\prec_2$，按下面方式给 C/R 赋序：$[f]\prec_1[g]$表示 $Ff\prec_2 Fg$. 因为$\forall\ [f]\prec_1[g],[g]\prec_1[f]$，有 $Ff\prec_2 Fg,Fg\prec_2 Ff$，从而 $Ff=Fg,F^*[f]=F^*[g]$，因此$[f]=[g]$. 易知$\prec_1$确为 C/R 中的序结构.

$\forall$ 平行矢$[f],[g]$，若$[f]\prec_1[g]$，则：$Ff\prec_2 Fg$，即 $F^*[f]\prec_2 F^*[g]$. 反之，若 $F^*[f]\prec_2 F^*[g]$，则 $Ff\prec_2 Fg$，从而$[f]\prec_1[g]$，故 $F^*:C/R\to D$ 为正序函子.

下面列举正序函子的一些基本性质：

1. 若 S、T 为范畴同构，S 正序，则 T 亦然.
2. 若 S、T 都是正序的，当复合有意义时，ST 亦然.
3. S、T 都是正序的充要条件为 $S\times T$ 正序，积范畴中的序结构按 § 1 性质 5 取.
4. 若 S 为正序、满函子，$Sf\prec k\prec Sg$，则$\exists$ h，使得 $Sh=k$，且 $f\prec h\prec g$.
5. 若 $S:C\to D$ 为正序、满函子，则$\forall\ f\in \mathrm{Arr}C,h\in\mathrm{Arr}D,Sf\prec h,\Rightarrow\exists\,!\,g\in\mathrm{Arr}C$，使得 $f\prec g$ 且 $Sg=h$.
6. 守信函子 $S:C\to D$ 满足：(1) $f\prec g\Rightarrow Sf\prec Sg,\forall\ f,g\in\mathrm{Arr}C$；(2) $\forall\ f\in\mathrm{Arr}C,h\in\mathrm{Arr}D,Sf\prec h\Rightarrow\exists\,!\,g\in\mathrm{Arr}C$，使得 $f\prec g\wedge Sg=h$，则 S 为正序函子.
7. 设$\langle F,G,\varphi\rangle:X\rightharpoonup A$，则：(1) 若 F 正序，$\forall\ m,n\in X(x,Ga)\,(m\prec n\Rightarrow\varphi^{-1}(m)\prec\varphi^{-1}(n))$；(2) 若 G 正序，$\forall\ s,t\in A(Fx,a)\ (s\prec t\Rightarrow\varphi(s)\prec\varphi(t))$.

命题 1 正序函子都是守信函子.

证明 设 F 为正序的，$\forall$ 平行矢 f,g，由 $Ff=Fg$ 知 $Ff\prec Fg\wedge Fg\prec Ff$，因此有 $f\prec g\wedge g\prec f$，从而 $f=g$，即 F 守信的.

§ 3 序单态与序满态

定义 3 在范畴 C 中，若有：

(1) $\forall\ g,h\ (fg\prec fh\Rightarrow g\prec h)$，则称 f 为序单的.

(2) $\forall\ k,l\ (kf\prec lf\Rightarrow k\prec l)$，则称 f 为序满的.

下面列举序单、序满的一些基本性质：

1. 复合有意义时，f,g 序单$\Rightarrow fg$ 序单，序满亦然.
2. 同构态既是序单的，又是序满的.
3. 若 $fg=h$ 则：h 序满$\Rightarrow f$ 序满，h 序单$\Rightarrow g$ 序单.

命题 2 可裂单态$\Rightarrow$序单态$\Rightarrow$单态；可裂满态$\Rightarrow$序满态$\Rightarrow$满态.

证明 设 f 为可裂单态，即$\exists$ g，使得 $gf=1,\forall\ m,n,fm\prec fn\Rightarrow gfm\prec gfn\Rightarrow m\prec n$，故 f 为序单态.

又设 f 为序单态，$\forall\ m, n, fm=fn \Rightarrow fm \prec fn \wedge fn \prec fm \Rightarrow m \prec n \wedge n \prec m \Rightarrow m=n$，从而 f 为单态．其它同理可证．

设 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$，则有结论：

4.　$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A, x \in \mathrm{Ob}X, G\varepsilon_a, \varepsilon_{Fx}$ 序满，$\eta_{Ga}, F\eta_x$ 序单．

5.　$\forall\ x \in \mathrm{Ob}X$，若 ε_{Fx} 序单，FGF 正序，则 F 正序．$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A$，若 η_{Ga} 序满，GFG 正序，则 G 正序．

6.　$\forall\ x \in \mathrm{Ob}X$，若 $F\eta_x$ 序满，F 正序，则 FGF 正序．$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A$，若 $G\varepsilon_a$ 序单，G 正序，则 GFG 正序．

7.　若 F 正序，Ff 序单，则 f 序单．序满亦然．

8.　若 F 正序，则 η_x 序单；若 G 正序，则 ε_a 序满．

命题 3　设 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$，则：

（1）　$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A, \varepsilon_a$ 序单、序满 $\Rightarrow FG$ 正序 $\Rightarrow \forall\ a \in \mathrm{Ob}A, \varepsilon_a$ 序满．

（2）　$\forall\ x \in \mathrm{Ob}X, \eta_x$ 序单、序满 $\Rightarrow GF$ 正序 $\Rightarrow \forall\ x \in \mathrm{Ob}X, \eta_x$ 序单．

证明　$\forall\ m \prec n$，有 $m\varepsilon_a \prec n\varepsilon_a$，由 $\varepsilon_a : FG \dot{\to} I_A$ 知 $\varepsilon_{a'} \cdot FGm \prec \varepsilon_{a'} \cdot FGn$．$FGa \xrightarrow{\varepsilon_a}$ 其中 $\mathrm{cod}m=a'$．又因 $\varepsilon_{a'}$ 序

$$
\begin{tikzcd}
FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "FGm"'] & a \arrow[d, "m"] \\
FGa' \arrow[r, "\varepsilon'_a"'] & a'
\end{tikzcd}
$$

单，故 $FGm \prec FGn$．反之，若 $FGm \prec FGn$，则 $\varepsilon_{a'} \cdot FGm \prec \varepsilon_{a'} \cdot FGn$，于是 $m\varepsilon_a \prec n\varepsilon_a$，又因 ε_a 序满，故 $m \prec n$，从而 FG 为正序的．

今设 FG 正序，$\forall\ m, n, m\varepsilon_a \prec n\varepsilon_a$，由 FG 正序知：$FGm \cdot FG\varepsilon_a \prec FGn \cdot FG\varepsilon_a$，又因 $G\varepsilon_a \cdot \eta_{Ga}=1_{Ga}$，于是 $FG\varepsilon_a \cdot F\eta_{Ga}=1_{FGa}$，所以 $FG\varepsilon_a$ 序满，故 $FGm \prec FGn$，从而 $m \prec n$，即 ε_a 序满．

（2）同理可证．

推论　设 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$，则有：

（1）　$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A, \varepsilon_a$ 单、满态 $\Rightarrow FG$ 守信 $\Rightarrow \varepsilon_a$ 满态；$\forall\ x \in \mathrm{Ob}X, \eta_x$ 单、满态 $\Rightarrow GF$ 守信 $\Rightarrow \eta_x$ 单态．

（2）　F 守信、满 $\Rightarrow GF$ 正序 $\Rightarrow F$ 守信；G 守信、满 $\Rightarrow FG$ 正序 $\Rightarrow G$ 守信．

§4　正序自然变换与正序附加

定义 4　设 $\alpha=(\alpha_a)_{a \in \mathrm{Ob}A} : F \dot{\to} G$，$\forall\ a \in \mathrm{Ob}A, \alpha_a$ 是序单、序满的，则称 α 为正序自然变换．

下面列举正序自然变换的简单性质：

1.　自然同构是正序的．

2.　若 $\alpha=(\alpha_a)$ 正序，则 $\forall\ a \in \mathrm{Ob}A, \alpha_a$ 为单、满态．

3.　复合有意义时，m、n 正序 $\Rightarrow mn$ 正序．

4.　m、n 正序等价于 $m \times n$ 正序．

5.　设 $\alpha : S \dot{\to} S', S、S' : B \times C \to D$，则 α 正序等价于 $\alpha(-, c), \alpha(b, -)$ 都正序，$\forall\ b \in \mathrm{Ob}B, c \in \mathrm{Ob}C$．

命题 4　设 $\alpha : F \dot{\to} G$ 正序，则：F 正序等价于 G 正序．

证明 不妨设 G 为正序的，$\forall$ 平行矢 f、$g: a \to a'$，由于 $Gf \cdot n_a = n_{a'} \cdot Ff, Gg \cdot n_a = n_{a'} \cdot Fg$，因此$\forall$ $f \prec g, Gf \prec Gg, Gf \cdot n_a \prec Gg \cdot n_a$，故 $n_{a'} \cdot Ff \prec n_{a'} \cdot Fg$，又 $n_{a'}$ 序单，所以 $Ff \prec Fg$. 反之，若 $Ff \prec Fg, n_{a'} \cdot Ff \prec n_{a'} \cdot Fg, Gf \cdot n_a \prec Gg \cdot n_a$，又因为 n_a 序满，故 $Gf \prec Gg, f \prec g$，从而 F 也是正序的. 同理可证另一情形.

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "n_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fa' \arrow[r, "n'_a"'] & Ga'
\end{tikzcd}
$$

推论 设 $F_1 \dashv G, F_2 \dashv G$，则 F_1 为正序等价于 F_2 为正序.

定义 5 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ 称为正序附加，如果 η、ε 都是正序的.

下面列举正序附加的一些基本性质：

1. $\langle F_1, G_1, \varphi_1 \rangle : X_1 \rightharpoonup A_1$，$\langle F_2, G_2, \varphi_2 \rangle : X_2 \rightharpoonup A_2$ 正序等价于 $\langle F_1, G_1, \varphi_1 \rangle \times \langle F_2, G_2, \varphi_2 \rangle$ 正序.
2. 伴随等价 $\Rightarrow$ 正序附加.

命题 5 设 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ 为正序附加，则 FG, GF 都是正序函子；F 正序等价于 G 正序.

命题 6 设 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$，则 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ 为伴随等价等价于 FG, GF 为正序、满的.

证明 $\Rightarrow$：由性质 2 及命题 5 易知. $\Leftarrow$：FG、GF 正序，由命题 3 推论知：F、G 守信. $\forall$ $f: Fx \to Fx'$，$Gf: GFx \to GFx'$，故$\exists$ $h: x \to x'$，使得 $GFh = Gf$，又 G 守信，故 $Fh = f$. 从而 F 为满的. 同理 G 也是满的，因此 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ 为伴随等价.

推论 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ 为伴随等价当且仅当 FG, GF 为守信、满函子.

命题 7 $T: A \to B$ 为正序、满函子当且仅当$\exists$ $\varphi \in \mathrm{BH}_T(A, B)$，使得$\forall$ 平行矢 f、$g \in \mathrm{Arr}A$，($f \prec g$ 等价于 $\varphi(f) \prec \varphi(g)$).

证明 必要性显然. 充分性：设 $\varphi \in \mathrm{BH}_T(A, B)$，满足上述条件，$\forall$ 平行矢 $f, g, f \prec g$ 有 $\varphi(f) \prec \varphi(g)$，即 $\varphi(1)Tf \prec \varphi(1)Tg$. 因为 $\varphi(1)$ 为同构态，它是序单的，故 $Tf \prec Tg$. 反之，$Tf \prec Tg, \varphi(1)Tf \prec \varphi(1)Tg$，即 $\varphi(f) \prec \varphi(g)$，于是 $f \prec g$. 故 T 为正序的. 又$\forall$ $h: Ta_1 \to Ta_2$，因 φ 为匹满的，于是$\exists$ $f: a_1 \to a_2$，　$\varphi(f) = h\varphi(1)$，即 $Tf\varphi(1) = h\varphi(1)$. 从而 $Tf = h$，即 T 也是满的.

命题 8 设 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$，$F$、$G$ 为正序的：$\forall$ $x \in \mathrm{Ob}X, \eta_x$ 满的，$\forall$ $a \in \mathrm{Ob}A, \varepsilon_a$ 单的，则 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ 为正序附加.

证明 由 F、G 为正序的，知$\forall$ $a \in \mathrm{Ob}A$，ε_a 为序满的. $\forall$ $m, n, \varepsilon_a m \prec \varepsilon_a n$，$\mathrm{dom}m = \mathrm{dom}n = a_0$，对于 $G_{a_0} \in X, \varepsilon_a \cdot m \cdot \varepsilon_{a_0}: FG_{a_0} \to a$，$\exists$! h，使有交换图：

$$
X \xrightarrow{F} A
$$

$$
\begin{tikzcd}
Ga & & a & \\
& & & \\
Ga_0 \arrow[uu, "\exists! h"] & FGa_0 \arrow[uur, "\varepsilon_a m \varepsilon_{a_0}"] \arrow[rr, dashed, "Fh"'] & & FGa \arrow[uul, "\varepsilon_a"']
\end{tikzcd}
$$

故 $\varepsilon_a \cdot Fh = \varepsilon_a \cdot m \cdot \varepsilon_{a_0}$，又 ε_a 为单态，因此 $Fh = m\varepsilon_{a_0}$；同理$\exists$! $k: G_{a_0} \to G_a$，使得 $Fk = n\varepsilon_{a_0}$. 由 $\varepsilon_a \cdot m \prec \varepsilon_a \cdot n$ 知 $\varepsilon_a \cdot m\varepsilon_{a_0} \prec \varepsilon_a \cdot n\varepsilon_{a_0}$，即 $\varphi^{-1}(h) \prec \varphi^{-1}(k)$. 其中 $\varphi: A(F-,-) \simeq X(-, G-)$. 又因为 G 为正序的，所以 $\varphi(\varphi^{-1}(h)) \prec \varphi(\varphi^{-1}(k))$，即 $h \prec k$，故 $Fh \prec Fk$，从而 $m\varepsilon_{a_0} \prec n\varepsilon_{a_0}$，而 ε_a 是序满的，因此 $m \prec n$，即 ε_a 序单. 同理可证，$\forall$ $x \in \mathrm{Ob}X$，η_x 是序单、序满的. 从而 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ 是正序的.

最后简要说明一下，范畴的态族中如引进其它序结构，可类似地建立起带格、Bool 代数、

BCI—代数 (BCK—代数)范畴,而且可以证明它们相应的同构关系可用正序、满函子来描述.

最后,对我的导师于永溪教授的悉心指导表示真诚的谢意.

参 考 文 献

[1] Yu Yongxi, *On the bijective half—functor*, J. Math. Res & Exposition, Vol. 9, No. 3, Aug. 1989.

[2] Yu Yongxi, *Topologies generated by functors*. J. Math. Res & Exposition, Vol 6, No. 3, 1986. No. 3.

[3] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, New York—Heidelberg—Berlin.

[4] 陈焕艮,范畴 Fun、Nat 和 Adi. 数学研究与评论,12:3 (1992).

[5] 陈焕艮,函子的构造,南京大学学报数学半年刊(待发表).

On Categories with Ordered Structures

Chen Huanyin
(Dept. of Math., Nanjing University)

Abstract

We give some results on the relations between positive sense ordered functors and adjoint functors.