第13卷第1期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 1
1993年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1993

C_p^α空间中的非线性逼近*

王萍华
(南京师范大学数学系,210024)

一 引言

刻画具有一定逼近阶的函数空间是逼近论研究的一个重要方面.这方面的古典结果可以追溯到本世纪初 D. Jackson 和 S. Bernstein 的工作,他们证明了周期为 2π 的连续函数在一致范数意义下用阶为 n 的三角多项式来逼近时,达到阶为 $E_n(f)=O(n^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$,充要条件是 $f\in\mathrm{Lip}\alpha$.对各种其它类型的逼近,包括代数多项式和等距结点样条逼近的这方面的结果也已得到.更一般地,我们考虑逼近空间 A_q^α, $\alpha,q\to 0$ 的刻画 $A_q^\alpha=\{f\mid \|f\|_{A_q^\alpha}<\infty\}$,其中

$$\|f\|_{A_q^\alpha}=\begin{cases}\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^\alpha E_n(f))^q n^{-1}\}^{1/q} & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{n\geqslant 1}n^\alpha E_n(f) & q=\infty.\end{cases}$$

最近,R. A. Devore 和 V. A. Popov 在[1]中给出了自由结点样条逼近和有理逼近所对应的逼近空间 A_q^α(样条),A_q^α(有理)的刻画.他们证明了这些逼近空间可以用 L_p 空间和 Besov 空间 $B_q^\alpha(L_p)$的内插空间来刻画,在特殊情况下,即是 Besov 空间本身.他们的证明关键在于建立两个不等式,即所谓 Jackson 不等式和 Bernstein 不等式.本文中,我们对另一种函数空间 C_p^α,建立了相应的 Jackson 不等式和 Bernstein 不等式,从而证明了上述两种逼近空间可以用 L_p 空间与 C_p^α 空间的内插空间来刻画.

二 Besov 空间和C_p^α空间

设 $f\in L_p(I_0)$, $0<p\leqslant\infty$, $I_0=[0,1]$,以 $\omega_r(f,t)_p$, $t>0$,表示 f 的第 r 阶光滑模,也即

$$\omega_r(f,t)_p=\omega_r(f,t,I_0)_p=\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta_h^r(f,\cdot)\|_{L_p(I_{rh})},$$

这里 Δ_h^r 是步长为 h 的第 r 阶差分,$I_{rh}=\{x:x,x+rh\in I_0\}$,对 $0<\alpha<r$, $0<q\leqslant\infty$,我们定义 Besov 空间 $B_q^\alpha(L_p)$: $B_q^\alpha(L_p)=\{f\in L_p\mid |f|_{B_q^\alpha(L_p)}<\infty\}$,其中

$$|f|_{B_q^\alpha(L_p)}=\begin{cases}\{\int_0^\infty(t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p)^q\frac{1}{t}dt\}^{1/q} & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{t>0}t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p & q=\infty.\end{cases}$$

我们定义 Besov 范数: $\|f\|_{B_q^\alpha(L_p)}=\|f\|_p+|f|_{B_q^\alpha(L_p)}$.

---

* 1990年9月4日收到.

另一类重要的函数空间是 C_p^α 空间. 设 $f\in L_p(I_0)$, $0<p\leqslant\infty$, $\alpha>0$, $r=[\alpha]+1$, 对 $\forall\ I\subset I_0$, 用 $p_I f$ 表示在 $L_p(I)$ 中 f 的最佳逼近多项式且 $\deg p_I f<r$, 令 $f_{\alpha,p}^{\#}(x)=\sup\limits_{I_0\supset I\ni x}\frac{1}{|I|^\alpha}\{\frac{1}{|I|}\int_I|f-p_I f|^p\}^{1/p}$, 其中上确界是对所有包含点 x 且包含在 I_0 内的区间 I 所取的. 对 $p>0$, 我们定义 C_p^α 空间: $C_p^\alpha=\{f\in L_p|f_{\alpha,p}^{\#}(x)\in L_p\}$. 定义 $|f|_{C_p^\alpha}=\|f_{\alpha,p}^{\#}\|_p$, $\|f\|_{C_p^\alpha}=\|f\|_p+|f|_{C_p^\alpha}$. 关于 C_p^α 空间的详细定义参见[2], [2]中对 $p\geqslant1$ 时的 C_p^α 空间用 $f_{\alpha,1}^{\#}$ 来定义的, 但正如[2]中证明的, 在等价范数意义下, 与我们这儿的定义是等价的. 对于 $\alpha=0$, 我们定义 $C_p^0=L_p$, $0<p<\infty$; $C_\infty^0=$ BMO.

Besov 空间和 C_p^α 空间有着密切的联系, 我们有下述定理:

定理 A[2] 设 $\alpha>0$, $0<p\leqslant\infty$, 我们有嵌入 $B_p^\alpha(L_p)\hookrightarrow C_p^\alpha\hookrightarrow B_\infty^\alpha(L_p)$.

C_p^α 空间之间亦有如下嵌入定理:

定理 B[2] 设 $0<p\leqslant q\leqslant\infty$, $0\leqslant\beta\leqslant\alpha+(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})$, 则我们有嵌入 $C_p^\alpha\hookrightarrow C_q^\beta$. 特别地取 $\beta=0$, $0<q<\infty$, $p=(\alpha+\frac{1}{q})^{-1}$ 时, 有 $C_p^\alpha\hookrightarrow L_q$.

三 引理及主要定理

我们先介绍实内插空间的定义.

设 X_0, X_1 是一对亚范空间, 它们嵌入 Hausdorff 空间 X 中, 那么对 $\forall\ f\in X_0+X_1$, K－泛函定义为 $K(f,t)=K(f,t,X_0,X_1)=\inf\limits_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{X_0}+t\|f_1\|_{X_1}\}$. 设 $0<\theta<1$, $0<q<\infty$, 利用 K－泛函我们可以定义插值空间 $X_{\theta,q}$: $X_{\theta,q}=(X_0,X_1)_{\theta,q}\{f\in X_0+X_1|\ \|f\|_{X_{\theta,q}}<\infty\}$,

$$\|f\|_{X_{\theta,q}}=\begin{cases}\{\int_0^\infty(t^{-\theta}K(f,t))^q t^{-1}\mathrm{d}t\}^{1/q} & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{t>0}t^{-\theta}K(f,t) & q=\infty.\end{cases}$$

关于插值空间的详细定义参见[3].

设 $\Sigma_n=\Sigma_{n,r}$ 表示在 $I_0=[0,1]$ 上至多有 n 个结点, 次数小于 r 的所有分段多项式全体, 即阶为 r, 至多有 n 个结点的自由结点样条函数空间. 令 $\sigma_n(f)_p=\sigma_{n,r}(f)_p=\inf\limits_{s\in\Sigma_n}\|f-s\|_p$. 用 A_q^α(样条)表示相应的用自由结点样条逼近的逼近空间, 即设 $\alpha,p,q>0$, A_q^α(样条) $=\{f\in L_p|\ \|f\|_{A_q^\alpha}<\infty\}$, 其中

$$\|f\|_{A_q^\alpha}=\begin{cases}\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^\alpha\sigma_n(f)_p)^q n^{-1}\}^{1/q} & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{n\geqslant1}n^\alpha\sigma_n(f)_p & q=\infty.\end{cases}$$

则 Petrushev 在[4]中已证明了: 设 $0<\alpha<r$, $0<p<\infty$, Jackson 不等式: $\sigma_n(f)_p\leqslant cn^{-\alpha}\|f\|_{B^\alpha}$, $f\in B^\alpha$; Benstein 不等式: $\|s\|_{B^\alpha}\leqslant cn^\alpha\|s\|_p$, $s\in\Sigma_n$ 成立, 其中 $B^\alpha=B_\sigma^\alpha(L_\sigma)$, $\sigma=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$.

在本文中, 我们证明了对于 C_p^α 空间有相应的 Jackson 不等式和 Bernstein 不等式成立.

定理 1 设 $0<p<\infty$, $r=1,2\cdots$, $0<\alpha<r$ 我们有以下两个不等式成立:

i) Jackson 不等式：$\sigma_n(f)_p\leqslant cn^{-\alpha}|f|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant cn^{-\alpha}\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$，对$\forall f\in C^\alpha_\sigma$；

ii) Bernstein 不等式：$\|s\|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant cn^\alpha\|s\|_p$，$s\in\Sigma_{n,r}$，其中 $\sigma=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$.

因为 $B^\alpha\hookrightarrow C^\alpha_\sigma$，所以我们的 Jackson 不等式是 Petrushev 的 Jackson 不等式的改进. 定理 1 的证明要用到下述两引理.

引理 1[2] 设 $K>[\alpha]$，$\alpha>0$，$f\in L_p(I_0)$，$0<p\leqslant\infty$，则对 $\forall h$，$|\Delta^k_h(f,x)|\leqslant C\sum_{i=0}^{k}f^\#_{\alpha,p}(x+ih)|h|^\alpha$ 几乎处处在 $I_h=\{x:x,x+kh\in I_0\}$上成立.

引理 2 设 $\alpha\geqslant0$，$I_0=[0,1]$，$0<p<\infty$，则对 $\sigma=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$，我们有

i) $\|f\|_p(I_0)\leqslant c\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$；

ii) $\forall f\in C^\alpha_\sigma$，及 $r<\alpha$，有 $E_r(f,I_0)_p\leqslant c|f|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant c\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$，这里 $E_r(f.I_0)_p$ 是 $L_p(I_0)$中用次数小于 r 的代数多项式逼近 f 的最佳逼近.

证明 i) 由定理 B，对 $0<p<\infty$，$\sigma=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$，$C^\alpha_\sigma\hookrightarrow L_p$，所以 $\|f\|_p(I_0)\leqslant c\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$.

ii) 首先取 $r=[\alpha]+1$，设多项式 Q，$\deg Q<r$，是 L_σ 中对 f 的最佳逼近多项式，则由 i)我们有：

$$E_r(f,I_0)_p\leqslant\|f-Q\|_p(I_0)\leqslant c\|f-Q\|_{C^\alpha_\sigma}=c[\|f-Q\|_\sigma+\|(f-Q)^\#_{\alpha,\sigma}\|_\sigma.$$

由 Whitney 定理及引理 1，我们有 $\|f-Q\|_\sigma\leqslant c\omega_r(f,(I_0))_\sigma\leqslant c\|f^\#_{\alpha,\sigma}\|_\sigma=c|f|_{C^\alpha_\sigma}$. 又由 $f^\#_{\alpha,\sigma}$ 的定义，我们有

$$(f-Q)^\#_{\alpha,\sigma}=\sup_{I_0\supset I}\frac{1}{|I|^\alpha}(\frac{1}{|I|}\int_I|f-Q-p_I(f-Q)|^\sigma)^{1/\sigma}$$

$$=\sup_{I_0\supset I}\frac{1}{|I|^\alpha}(\frac{1}{|I|}\int_I|f-p_If|^\sigma)^{1/\sigma}=f^\#_{\alpha,\sigma}(x),$$

所以 $\|(f-Q)^\#_{\alpha,\sigma}\|_\sigma=\|f^\#_{\alpha,\sigma}\|_\sigma=|f|_{C^\alpha_\sigma}$. 从而，我们得到 $E_r(f,I_0)_p\leqslant c|f|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant c\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$. 因此，对任意 r 大于 α，我们有 $E_r(f,I_0)_p\leqslant E_{[\alpha]+1}(f,I_0)_p\leqslant c|f|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant c\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$. 这样，我们完成了引理 2 的证明.

定理 1 的证明

i) 令 $|f|_{C^\alpha_\sigma}=\|f^\#_{\alpha,\sigma}\|_\sigma=M$，对$\forall\sigma>0$，选择区间 I_j，$j=1,2,\cdots,n$ 是 I_0 的一个分划，即 I_j 互不相交，且$\bigcup_{j=1}^{n}I_j=I_0$，且满足 $\|f^\#_{\alpha,\sigma}\|^\sigma_\sigma(I_j)\leqslant M^\sigma/n$. 根据引理 2，在 I_j 上，存在代数多项式 p_j，$\deg p_j<r$，$j=1,2,\cdots n$，满足

$$\|f-p_j\|_p(I_j)\leqslant c|f|_{C^\alpha_\sigma}(I_j)=c\|\sup_{I_j>I}\frac{1}{|I|^\alpha}(\frac{1}{|I|}\int_I|f-p_If|^\sigma)^{1/\sigma}\|_{L_\sigma(I_j)}$$

$$\leqslant c\|\sup_{I_0>I}\frac{1}{|I|^\alpha}(\frac{1}{|I|}\int_I|f-p_If|^\sigma)^{1/\sigma}\|_{L_\sigma(I_j)}=c\|f^\#_{\alpha,\sigma}\|_{L_\sigma(I_j)}$$

$$\leqslant cMn^{-1/\sigma}.$$

令 $S=p_j\quad x\in I_j$，$j=1,2,\cdots,n$，那么 $s\in\Sigma_{n,r}$，且 $\sigma^p_n(f)_p\leqslant\|f-s\|^p_p(I_0)=\sum_{j=1}^{n}\|f-s\|^p_p(I_j)\leqslant c\sum_{j=1}^{n}M^pn^{-p/\sigma}=cM^pn^{1-p/\sigma}$. 所以有 $\sigma_n(f)_p\leqslant cMn^{-\alpha}$，即 $\sigma_n(f)_p\leqslant cn^{-\alpha}|f|_{C^\alpha_\sigma}\leqslant cn^{-\alpha}\|f\|_{C^\alpha_\sigma}$

从而 i)成立.

ii)即是定理 A 及 Petrushev 的 Bernstein 不等式的推论. □

在[1]中,Devore 和 Popov 证明了下述定理.

定理 C[1] 设 X 是亚范的 Abel 群,$\bar{y}\subset X$,$\bar{y}$ 本身带有亚范数 $\|\cdot\|_{\bar{y}}$,如果 $\bar{y}$ 满足 Jackson 不等式:$E_n(f)\leqslant cn^{-r}\|f\|_{\bar{y}}$, $f\in\bar{y}$,Bernstein 不等式:$\|g\|_{Y}\leqslant cn^{r}\|g\|_{X}$, $g\in G_n$,G_n 是用来作为逼近工具的函数空间,比如 n 次代数多项式空间 P_n, $n=1,2,\cdots$,则对$\forall$ $0<\alpha<r,0<q\leqslant\infty$,有

$$A_q^\alpha=(X,\bar{y})_{\alpha/r,q}.$$

根据 Devore 和 Popov 定理,我们可以得到自由结点样条逼近空间 A_q^α(样条)的刻划.

定理 2 设 $0<p<\infty,0<q\leqslant\infty,0<\alpha<\beta<r$,如果 $\sigma=(\beta+\frac{1}{p})^{-1}$,则我们有 A_q^α(样条) $=(L_p,C_\sigma^\beta)_{\alpha/\beta,q}$. Devore 和 Popov 在[1]中还证明了,当 $\lambda=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$时,有 A_λ^α(样条)$=(L_p,B^\beta)_{\alpha/\beta,\lambda}=B^\alpha$,所以我们又有

定理 3 设 $0<p<\infty,0<\alpha<\beta<r,\sigma=(\beta+\frac{1}{p})^{-1}$,则我们有$(L_p,C_\sigma^\beta)_{\alpha/\beta,\lambda}=B^\alpha$,其中 $\lambda=(\alpha+\frac{1}{p})^{-1}$.

在[1]中,Devore 和 Popov 还证明了,对于 $1<p<\infty$及任何 $\alpha,q>0$,有 A_q^α(有理)$=A_q^\alpha$(样条),因此我们还有

定理 4 设 $1<p<\infty,\alpha,q>0$,则 A_q^α(有理)$=(L_p,C_\sigma^\beta)_{\alpha/\beta,q}$,其中 $\sigma=(\beta+\frac{1}{p})^{-1}$.

参 考 文 献

[1] R. A. Devore and V. A. Popov, *Interpolation spaces and nonlinear approximation in "Function Spaces and Approximation"*, M. Cwikel, J. peetre, Y. Sagher, H. Wallin, eds, Springer Lecture Notes in Math. (1988) 191—205.

[2] R. A. Devore and R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Memoris, AMS, Vol 283, Providence, R.I. 1984.

[3] J. Bergh—J. Löfstrom, *Interpolation Spaces, An Introduction*, Springer, Berlin, 1976.

[4] P. Petrushev, *Direct and converse theorems for spline and rational approximation and Besov spaces*, in *Functions Spaces and Approximation*, M. Cwikel, J. peetre, Y. Sagher, H. Wallin, eds. Springer Lecture Notes in Math (1988), 363—377.

Non-linear Approximation in C_p^α Spaces

Wang Pinghua

(Dept. of Math., Nanjing Normal University)

Abstract

In this paper, we establish the following Jackson and Bernstein inequalities for C_p^α space:

$$\sigma_n(f)_p\leq Cn^{-\alpha}\|f\|_{C_\sigma^\alpha},\quad f\in C_\sigma^\alpha;\quad \|S\|_{C_\sigma^\alpha}\leq Cn^\alpha\|S\|_p,\quad S\in\Sigma_{n,r},$$

where $\sigma=(\alpha+\frac{1}{p}^{-1}),\alpha>0,0<p<\infty$. Moreover, these inequalities are used to give characterizations of the approximation spaces resulted from two approximations verpectively by splines with free knots and approximation by rational functions.