第13卷第1期
1993年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 1
Feb. 1993

关于Polatoǧlu的两个结果*

杨定恭
(苏州大学数学系,215006)

Y. Polatoǧlu 最近在文献[1]中得到的主要结果是给出 λ—螺旋形函数类 S_λ^* 和 p 次 λ—螺旋形函数类 $S_{\lambda,p}^*$,$(-\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2}$,$p$ 为正整数)的 α—凸性半径,即

定理A 类 S_λ^* 的 α—凸性半径是 $r=((\cos\lambda+\alpha)-\sqrt{(\cos\lambda+\alpha)^2-\cos2\lambda})/\cos2\lambda$,这里 $0\leqslant\alpha\leqslant1$.

定理B 类 $S_{\lambda,p}^*$ 的 α—凸性半径是 $r=\sqrt[p]{\dfrac{(\cos\lambda+\alpha p)-\sqrt{(\cos\lambda+\alpha p)^2-\cos2\lambda}}{\cos2\lambda}}$,这里 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{p}$.

我们指出,[1]中定理A和B的证明是通不过的.事实上,按照 $s(z)=z+\cdots$ 属于 S_λ^* 的定义有 $e^{i\lambda}\frac{zs'(z)}{s(z)}=\cos\lambda\cdot p(z)+i\sin\lambda$,这里 $p(z)$ 在 $|z|<1$ 中解析且满足条件 $\mathrm{Re}p(z)>0$,$p(0)=1$.但[1,(2.2)]把上式误写成 $e^{i\lambda}\frac{zs'(z)}{s(z)}=p(z)$,并以它为出发点进行推理,这就导致[1]中引理2.1,推论2.1直至上述定理A和定理B的证明皆不能成立.本文的目的是纠正[1]的错误并建立相应的正确结果.

引理1[2] 若 $s(z)\in S_\lambda^*$,则对 $|z|=r<1$,有 $\left|\frac{zs'(z)}{s(z)}-\frac{1+e^{-2i\lambda}r^2}{1-r^2}\right|\leqslant\frac{2r\cos\lambda}{1-r^2}$.这估计是准确的,且有极值函数 $s_0(z)=\frac{z}{(1-\varepsilon z)^{2\cos\lambda\cdot e^{-i\lambda}}}$ $(|\varepsilon|=1)$.

引理2[3] 若 $p(z)$ 在 $|z|<1$ 中解析且满足条件 $\mathrm{Re}p(z)>0$,$p(0)=1$,则对 $\lambda\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 和 $|z|=r<1$ 有

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)+i\mathrm{tg}\lambda}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{2r\cos\lambda}{1-2r|\sin\lambda|+r^2}, & r<|\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}|\\ \dfrac{2r}{1-r^2}, & r\geqslant|\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}|.\end{cases}$$

这估计是准确的,极值函数具有形式 $p_0(z)=\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}$ $(|\varepsilon|=1)$.

引理3 设 $\varphi(\lambda)=(\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2})^2\cos2\lambda-2\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}(\cos\lambda+\beta)+1$,则(i)对 $\beta>0$,方程 $\varphi(\lambda)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中恰有一根 λ_0,当 $0\leqslant\lambda<\lambda_0$ 时 $\varphi(\lambda)>0$,当 $\lambda_0<\lambda<\frac{\pi}{2}$ 时 $\varphi(\lambda)<0$;(ii)对 $\beta=0$,当 $0\leqslant\lambda<\frac{\pi}{2}$

* 1991年3月20日收到.

时 $\varphi(\lambda)>0$. 利用以上引理可以证明

定理 1 设 λ_0 是方程 $(\mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2})^2\cos2\lambda-2\mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2}(\cos\lambda+\alpha)+1=0$ 的最小正根，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，则

(i) 当 $\lambda_0\leqslant|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ 和 $\alpha>0$，S_λ^* 的 α—凸性半径由方程

$$(r^2\cos2\lambda-2r\cos\lambda+1)(r^2-2r|\sin\lambda|+1)-2\alpha r(1-r^2)\cos\lambda=0$$

的最小正根给出；

(ii) 当 $|\lambda|<\lambda_0$，S_λ^* 的 α—凸性半径由方程

$$r^2\cos2\lambda-2r(\cos\lambda+\alpha)+1=0$$

的最小正根给出.

定理 2 设 λ_0 是方程 $(\mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2})^2\cos2\lambda-2\mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2}(\cos\lambda+\alpha p)+1=0$ 的最小正根，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{p}$，则

(i) 当 $\lambda_0\leqslant|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ 和 $\alpha>0$，$S_{\lambda,p}^*$ 的 α—凸性半径由方程

$$(r^{2p}\cos2\lambda-2r^p\cos\lambda+1)(r^{2p}-2r^p|\sin\lambda|+1)-2\alpha pr^p(1-r^{2p})\cos\lambda=0$$

的最小正根给出；

(ii) 当 $|\lambda|<\lambda_0$，$S_{\lambda,p}^*$ 的 α—凸性半径由方程

$$r^{2p}\cos2\lambda-2r^p(\cos\lambda+\alpha p)+1=0$$

的最小正根给出. 若在定理 1 中置 $\alpha=1$，我们得到 S_λ^* 的凸性半径.

参 考 文 献

[1] Y. Polatoğlu, *The radius of α—convexity for the classes of λ—spirallike functions and p—fold λ—spirallike functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 34(1989), 263—267.

[2] R. J. Libera, *Univalent α—spiral functions*, Canad. J. Math. 19(1967), 449—456.

[3] S. Ruscheweyh and V. Singh, *On certain extremal problems for functions with positive real part*, Proc. Amer. Math. Soc. 61(1976), 329—334.

On Two Results of Polatoğlu

Yang Dinggong

(Dept. of Math., Suzhou University)

Abstract

In this paper we point out some errors in Polatoğlu's paper [1] and obtain the radius of α-convexity for the classes of λ-spixallike functions and p-fold λ-spixallike functions.