第13卷第1期
1993年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 1
Feb. 1993

无穷级整函数的一个缺项定理*

邱淦俤　　　何文龙
(宁德师专数学系，福建 352100)　　(三明师专数学系，福建)

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 为整函数，为了显示它的缺项，我们把它表示成

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\lambda_n}z^{\lambda_n}. \tag{1}$$

1929年，G. Polyà[1] 猜测：当整函数(1)为有穷级时，若其残存指数序列 $\{\lambda_n\}$ 满足 Fabry 缺项条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\infty, \tag{2}$$

则 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln L(r,f)/\ln M(r,f))=1$ 成立。其中 $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，$L(r,f)=\min\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

1963年，Fuchs[2] 证实了这个猜测.

当整函数(1)为无穷级时，T. Kovari[3] 和谢晖春[4] 分别在加强的缺项条件

$$\lambda_n>n(\ln n)^{1+\varepsilon}\text{ 和 }\lambda_n>n\ln n(\ln\ln n)^{1+\varepsilon}\ (\varepsilon>0) \tag{3}$$

下证明了 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln L(r,f)/\ln M(r,f))=1$，除去 r 的一个对数测度为有穷的集合外.

本文在减弱条件(3)为

$$\lambda_n>n(\ln n)^{1-\varepsilon}\quad(0<\varepsilon<1) \tag{4}$$

下得到如下结果：

定理　若整函数(1)是无穷级的，其残存指数序 $\{\lambda_n\}$ 满足缺项条件(4)，则对于任意连续路径 Γ 有 $\overline{\lim\limits_{\substack{|z|=r\to\infty\\ z\in\Gamma}}}(\ln|f(z)|/\ln M(r,f))=1$，除去 r 的一个对数测度为有限的集合外.

要证明此定理，主要依据以下几个引理：

引理1[3]　设 $Q(r)$ 为 $[1,\infty]$ 上的增加函数，且 $\lambda>0$，$q>1$，则除去 r 的一个对数测度为有穷的集合外，有

$$Q\left(r+\frac{r}{\{\ln Q(r)\}^{1+\lambda}}\right)<qQ(r). \tag{5}$$

引理2[5]　设 $\{\lambda_n\}$ 为非负整数的严格增加序列，则对于每一个 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 及 $\delta(0\leqslant\delta\leqslant2\pi)$ 有

$$\max_{0\leqslant\varphi<2\pi}\left|\sum_{n=1}^{p}A_n e^{i\lambda_n\varphi}\right|\leqslant\left(\frac{40}{\delta}\right)^p\cdot\max_{|\varphi-\theta|\leqslant\frac{\delta}{2}}\left|\sum_{n=1}^{p}A_n e^{i\lambda_n\varphi}\right|. \tag{6}$$

* 1990年1月11日收到.

引理 3 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\lambda_n}z^{\lambda_n}$ 为整函数，其残存指数序列 $\{\lambda_n\}$ 满足缺项条件(4)，$|z|=r$，$w>0$. 令

$$\begin{cases} N=[3\ln M(r,f)\{\ln\ln M(r,f)\}^{w}] \\ R(z)=\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_{\lambda_n}z^{\lambda_n} \end{cases}, \tag{7}$$

则除去 r 的一个对数测度为有穷的集合外有 $|R(z)|\leqslant 1$. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

引理 4 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\lambda_n}z^{\lambda_n}$ 为满足缺项条件(4)的无穷级整函数. 又设 θ 和 δ 均为 r 的函数，满足条件

$$\delta\geqslant\{\ln\ln M(r,f)\}^{-\mu}\qquad(\text{对某一 }\mu>0), \tag{8}$$

则对于每一个 $\eta>0$，有

$$\ln M(r,\theta,\delta)>(1-\eta)\ln M(r,f), \tag{9}$$

除去 r 的一个对数测度为有穷的集合外，其中 $M(r,\theta,\delta)=\max\limits_{|\varphi-\theta|\leqslant\frac{\delta}{2}}|f(re^{i\varphi})|$.

引理 5[3] 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上解析，L 是一条连接 $z=0$ 与 $|z|=R$ 上一点的约当曲线，$\max\limits_{|z|=R}|f(z)|=M$，$\max\limits_{z\in L}|f(z)|=m<M$，则对于 $|z|\leqslant\frac{R}{6}$ 有

$$|f(z)|\leqslant m^{\frac{1}{4}}\cdot M^{\frac{3}{4}}. \tag{10}$$

参 考 文 献

[1] G. Polyá, Math. Zeibschrift, Vol. 29 (1929), 549—640.

[2] W. H. J. Fuchs, Illionois J. Math., 7(1963), 661—667.

[3] T. Kovari, Michigan Math. J., 12(1965), 133—140.

[4] 谢晖春，整函数的一个缺项定理，福建师范大学学报，1(1981), 27—31.

[5] P. Turán, Rev. Math. Pures Appl., 1(1956), 27—32.