第13卷第2期 1993年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 2 May 1993

一类非自治离散周期系统的周期解*

王德全　黄永年
(新疆大学数学系，乌鲁木齐 830046)

考虑非自治离散系统

$$x(\tau+1)=A(\tau,x(\tau))x(\tau)+b(\tau,x(\tau)),\tag{1}$$

$\tau\in I=\{\tau_0+i,\tau_0>0,i=0,1,2,\cdots\}$, $x\in R^n$, $A:I\times R^n\to R^{n\times n}$ 和 $b:I\times R^n\to R^n$ 是连续的. 设对所有的 $(\tau,x)\in I\times R^n$ 有某个整数 $m>1$，使得 $A(\tau+m,x)=A(\tau,x)$, $B(\tau+m,x)=b(\tau,x)$，并记 $I_0=\{\tau_0,\tau_0+1,\cdots,\tau_0+m-1\}$. 这时称系统(1)为离散周期系统，用 $x(\tau,\tau_0,x_0)$ 表示系统(1)满足初始条件 $x(\tau_0)=x_0$ 的唯一解，并对初始值 x_0 是连续的，$\tau\geqslant\tau_0>0$.

利用 Schauder 不动点定理，可以证明如下的：

定理1　如果存在定义在 I 上的非负函数 $a(\tau)$, $a(\tau)=a(\tau+m)$，使得对任意的 $(\tau,x)\in I_0\times R^n$，有

a)　$\|A(\tau,x)\|\leqslant a(\tau),\quad \prod\limits_{\tau=\tau_0}^{\tau_0+m-1}a(\tau)\overset{\triangle}{=}k<1;$

b)　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\sup\limits_{\|x\|\leqslant n}\|b(\tau_0+j,x)\|<\dfrac{1-K}{A(1-K+A)},$

这里 $A=\max\limits_{\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau'\leqslant\tau_0+m-1}\{\prod\limits_{i=\tau}^{\tau'}a(i),1\}$，那么系统(1)至少存在一个 m—周期解.

定理2　如果系统(1)满足定理1的条件a)，且有 $\|b(\tau,x)\|\leqslant\sigma\|x\|+M\|x\|^{\rho}+N$，其中 M,N 为非负常数，$0<\rho<1$, $0<\sigma<\dfrac{1-K}{mA(1-K+A)}$，$A,K$ 的意义同前，则系统(1)至少存在一个 m—周期解.

定理3　如果系统(1)满足定理1的条件a)且有 $\|b(\tau,x)-b(\tau,y)\|\leqslant\sigma\|x-y\|$. 其中 $0<\sigma<\dfrac{1-K}{mA(1-K+A)}$，$A,K$ 的意义同前，则系统(1)至少存在一个 m—周期解.

例　系统 $x(k+1)=\dfrac{x(k)e^{x(k)}}{1+e^{x(k)}}(1+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{k\pi}{2})+\dfrac{Mx^3(k)}{N+x^2(k)}\cos\dfrac{k\pi}{2}$ 满足定理1的条件，可知此系统当 $M<\dfrac{1}{21}$ 时至少存在一个4—周期解.

参考文献

[1]　李黎明、王慕秋，非自治离散周期系统的周期解，系统科学与数学，10(2)(1990)，131—136.
[2]　王联、王慕秋，常差分方程. 新疆大学出版社(1991).

* 1991年1月12日收到. 92年11月17日收到修改稿.