

体上矩阵广义逆的共变条件*

曹重光

(黑龙江大学数学系, 哈尔滨 150080)

设 K 为任意除环, F 记其中心, $K_r^{m \times n}$ 记 K 上秩 r 的 $m \times n$ 矩阵的集合. 若 $A \in K_r^{m \times n}$ 则 A' 记 A 的转置, 又设 σ 为 K 的对合反自同构则 $A \rightarrow A^\sigma$ 为一个对合函数^[1], 记 $A^\sigma = A^*$, 由此可定义 A 的 $M-P$ 广义逆 A^+ 本文中 I_n 记 n 阶单位阵, $GL_n(K)$ 记 K 上 n 阶一般线性群, $(E_{ij})_{m,n}$ 记 K 上 $m \times n$ 矩阵且 (i, j) 位置为 1, 其余位置为 0, 本文研究广义逆的共变条件, 推广了[2]的有关结果.

引理 1 设 $A \in K_r^{m \times n}$ 且 A^+ 存在, P 及 Q 为可逆阵, 则 $(Q^{-1}A^+P^{-1})^+ = PAQ$ 当且仅当 P^*P 与 AA^+ 可交换, QQ^* 与 A^+A 可交换.

引理 2 若对一切使 A^+ 及 $(PAQ)^+$ 存在的秩 r 的 A 有 $(PAQ)^+ = GA^+H$, 其中 $A \in K_r^{m \times n}$, $r \geq 1$, P, H, Q, G 均为可逆阵则 $G = aQ^{-1}$, $H = a^{-1}P^{-1}$, $a \in F$.

定理 1 $\text{char} K \neq 2$, $A \in K_r^{m \times n}$, P 及 Q 为可逆阵, 若对一切 A^+ 及 $(PAQ)^+$ 存在的秩 r 的 A 有 $(PAQ)^+ = GA^+H$, 则

- (i) $r=0$ 时, P, Q, G, H 任意;
- (ii) $r \geq 1$ 时, $G = cQ^{-1}$, $H = c^{-1}P^{-1}$, $c \in F$;
- (iii) $0 < r < \min\{m, n\}$ 时, $P^*P = aI_m$, $QQ^* = bI_n$, $a, b \in F$;
- (iv) $m > n$, $r=n$ 时 Q 任意, $P^*P = aI_m$, $a \in F$;
- (v) $n > m$, $r=m$ 时, P 任意, $QQ^* = bI_n$, $b \in F$;
- (vi) $m=n$, $r=m=n$ 时, P, Q 任意.

推论 设 K 为域, $\text{ch} K = 2$, 定理 1 的结果仍成立.

定理 2 设 $C(A) = \{T \in GL_n(K) \mid \text{对给定的 } A \in K_r^{n \times n}, A^+ \text{ 存在, 且若 } (TAT^{-1})^+ \text{ 存在, 则 } (TAT^{-1})^+ = TA^+T^{-1}\}$, 若 $C(A) = GL_n(K)$ 则 $r=0$ 或 n .

参 考 文 献

- [1] 曹重光, 数学学报 1989, No. 1, 118—121.
- [2] 杨忠鹏, 东北数学 1989, No. 2, 277—282.

* 1991年3月19日收到. 92年11月26日收到修改稿.