第13卷第2期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 2
1993年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1993

关于上半连续性和Kakutani不动点定理*

戴正德 杨千山
(云南大学数学系，云南省应用数学研究所，昆明 650091) (云南民族学院数学系，昆明 650031)

摘 要

本文给出了集值映象的弱上半连续而非准上半连续的例子，证明了对于闭凸的集值映象弱上半连续和准上半连续等价，并把Kakutani不动点定理推广到非闭凸的弱上半连续的情形.

§1 引 言

关于集值映象的上半连续、准上半连续和弱上半连续之间的关系，[1]给出了准上半连续而非上半连续的例子，[2]给出了弱上半连续而非准上半连续的例子，并证明了上半连续⇒准上半连续⇒弱上半连续. 目前有关弱上半连续的不动点定理都是研究闭凸映象，本文证明了闭凸弱上半连续必为准上半连续，并非是准上半连续的真正推广，同时把集值映象的Kakutani不动点定理推广到非准上半连续的弱上半连续情形，给出了一个既非闭凸又非准上半连续而是弱上半连续的例子.

§2 定 义

定义1 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间，$F: X\to 2^Y\backslash\varnothing$. $x_0\in X$，称 F 在 x_0 上半连续(记为 usc)，如果对于 Y 中每一包含 $F(x_0)$ 的开集 G，$\exists$ x_0 的邻域 $N(x_0)$，使得 $F(N(x_0))\subset G$. 如果 F 在 X 上任何一点 usc，则称 F 在 X 上 usc.

定义2 设 X 上 Hausdorff 拓扑空间，E 是 Hausdorff 拓扑线性空间，$F: X\to 2^E\backslash\varnothing$. $x_0\in X$，称 F 在 x_0 准上半连续(记为 udc)，如果对于 E 中每一包含 $F(x_0)$ 的开半平面 H，$\exists$ x_0 的邻域 $N(x_0)$，使得 $F(N(x_0))\subset H$. 如果 F 在 X 上任何一点 udc. 则称 F 在 X 上 udc.

定义3 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，E 是 Hausdorff 拓扑线性空间，$F: X\to 2^E\backslash\varnothing$. $x_0\in X$，称 F 在 x_0 弱上半连续(记为 uhc)，如果$\forall$ $\varphi\in E^*$(E 上所有连续线性泛函构成的线性空间). $\sigma(x)=\sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)$在 $x_0$usc. 如果 F 在 X 上任何一点 uhc，则称 F 在 X 上 uhc.

注1 F 在 X 上 uhc 等价于$\forall$ $\varphi\in E^*$、$\lambda\in R$(实数域)，集合$\{x\in X: \sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)<\lambda\}$是 X 中的开集.

* 1991年3月27日收到.

定义 4 $M_{\varphi,\lambda}=\{x\in E:\varphi(x)=\lambda\}(\varphi\in E^*,\lambda\in R)$称为 $A\subset E$ 的渐近面，如果 $M_{\varphi,\lambda}\cap A=\varnothing$，且 $\exists\ 0<\varepsilon<\lambda$ 使得$\forall\ \mu\in(\lambda-\varepsilon,\lambda)$，$M_{\varphi,\mu}\cap A\neq\varnothing$. 紧集必无渐近面.

§3 主 要 结 果

引理 1 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，E 是 Hausdorff 拓扑线性空间，$F:X\to 2^E\setminus\varnothing$. 则下面结论成立.

1) 若 F 在 X 上 udc，则 F 在 X 上 uhc.

2) 若 F 在 X 上 uhc，且$\forall\ kx\in X$，$F(x)$是闭凸集且无渐近面，则 F 在 X 上 udc.

证明 1) $\forall\ \varphi\in E^*,\lambda\in R$，令 $S_{\varphi,\lambda}=\{x\in X:\sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)\geqslant\lambda\}$，设$\{x_n\}\subset S_{\varphi,\lambda}$，$x_n\to x_0$，假若 $x_0\bar{\in} S_{\varphi,\lambda}$ 则 $\sup\limits_{u\in F(x_0)}\varphi(u)<\lambda\leqslant\sup\limits_{u\in F(x_n)}\varphi(u)\ (n=1,2,\cdots)$. 令 $\sup\limits_{u\in F(x_0)}\varphi(u)<\sigma<\lambda$，设 $H_{\varphi,\mu}=\{y\in E:\varphi(y)<\mu\}$ 则 $H_{\varphi,\mu}$ 是包含 $F(x_0)$的开半空间.

F 在 X 上 udc，$\exists\ N(x_0)$使得 $F(N(x_0))\subset H_{\varphi,\mu}$ 所以$\exists\ N$，只要当 $n>N$ 时就有 $F(x_n)\subset H_{\varphi,\mu}$. 由于 $\sup\varphi(u)\geqslant\lambda\geqslant\mu(r=u\in F(x_n)\ 1,2,\cdots$，故$\forall\ n$，$\exists\ u_n\in F(x_n)$，使得 $\varphi(u_n)>\mu$. 从而 $F(x_n)\not\subset H_{\varphi,\mu}\ (n=1,2,\cdots)$矛盾. 因此 $x_0\in S_{\varphi,\lambda}$，$S_{\varphi,\lambda}$ 是闭集. 即$\{x\in X:\sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)<\lambda\}$是开集，所以 F 在 X 上 uhc.

2) 假设 F 在 X 上非 udc，则$\exists\ x_0\in X$ 及包含 $F(x_0)$的某开半空间 $H_{\varphi,\lambda}=\{y\in E:\varphi(y)<\lambda\}$ 其中 $\varphi\in E^*,\lambda\in R$，使得$\exists\ \{x_n\}\subset X$，$x_n\to x_0$ 而 $F(x_n)\not\subset H_{\varphi,\lambda}$，于是$\exists\ y_n\in F(x_n)$，使得

$$\varphi(y_n)\geqslant\lambda. \tag{$*$}$$

设 $S_{\varphi,\lambda}=\{x\in X:\sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)\geqslant\lambda\}$.

一方面，由 F 在 X 上 uhc 知 $S_{\varphi,\lambda}$ 是闭集，再由($*$)得 $x_n\in S_{\varphi,\lambda}\ (n=1,2,\cdots)$故 $x_0\in S_{\varphi,\lambda}$.

另一方面，由于 $F(x_0)$是非空闭凸集且无渐近面，于是$\exists\ y_1,y_2\in F(x_0)$（$y_1,y_2$ 不必互异），及 $a\in[0,+\infty]$，使得$\overline{\lim\limits_{t\to a}}\varphi(y_t)=\sup\limits_{u\in F(x_0)}\varphi(u)$其中 $y_t=y_0+t(y_2-y_1)$.

设 $L(y_1,y_2)=\{y_t:y_t=y_1+t(y_2-y_1),t\in[0,a]\}\cap F(x_0)$，若 $L(y_1,y_2)$是 $F(x_0)$中闭线段，则 φ 在其上达到上确界，从而$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\varphi(y_t)<\lambda$.

如果 $L(y_1,y_2)$是闭射线，设$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\varphi(y_t)=\mu$，则$-\infty<\mu\leqslant\lambda$，于是$\exists\ \{t_n\}$使得$\overline{\lim\limits_{t_n\to\infty}}\varphi(y_t)=\mu$，因此存在 N，只要当 $n_1,n_2>N$ 时，就有

$$|\varphi(y_{t_{n_2}})-\varphi(y_{t_{n_1}})|<1.$$

特别当 $n_1\neq n_2$ 时，有$|\varphi(y_2)-\varphi(y_1)|<\frac{1}{|t_{n_2}-t_{n_1}|}$. 固定 $n_1>N$，让 $n_2\to\infty$，此时 $t_{n_2}\to\infty$，得 $\varphi(y_2)=\varphi(y_1)$，故$\forall\ t\in[0,\infty)\ \varphi(y_t)=\varphi(y_1)$，所以$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\varphi(y_t)=\varphi(y_1)<\lambda$. 总之 $\sup\limits_{u\in F(x_0)}\varphi(y)<\lambda$，从而 $x_0\bar{\in} S_{\varphi,\lambda}$，矛盾. 所以 F 在 X 上 udc. 证毕.

注 2 引理 1 表明对于闭凸集值映象，uhc 与 udc 等价. [4]等一些文献讨论的都是闭凸集值映象的弱上半连续，从而并非真正地推广了准上半连续.

引理 2 （[3]的主要定理） 设 X 是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间 E 中的凸紧集，F 和 G 在 X 上都 udc，且使

i) $\forall x\in X, F(x)$和$G(x)$都是E中非空闭凸集，且至少有一个是紧集.

ii) $\forall x\in X,\varphi\in E^*$，若$\inf\limits_{y\in X}\varphi(x-y)=0$，就有$\inf\limits_{\substack{u\in F(x)\\ v\in G(x)}}\varphi(u-v)\leqslant 0$ 则$\exists\ x^*\in X$，使得$F(x^*)\cap G(x^*)\neq\varnothing$.

证明见[3]中定理 2.1 的证明

定理 1 设X是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间E中的凸紧集，$F、G: X\to 2^E\backslash\varnothing$. 如果存在$X$上 uhc 的$\widetilde{F},\widetilde{G}$满足

i) $\forall x\in X,\widetilde{F}(x)\subset F(x)、\widetilde{G}(x)\subset G(x),\widetilde{F}(x)、\widetilde{G}(x)$都是非空闭凸集，无渐近面且至少有一个是紧集；

ii) $\forall x\in X,\varphi\in E^*$，若$\inf\limits_{y\in X}\varphi(x-y)=0$就有$\inf\limits_{\substack{u\in \widetilde{F}(x)\\ v\in \widetilde{G}(x)}}\varphi(u-v)\leqslant 0$.

则$\exists\ x^*\in X$，使得$F(x^*)\cap G(x^*)\neq\varnothing$.

证明 由引理 1 2)，$\widetilde{F},\widetilde{G}$满足引理 2 的条件，故存在$x^*\in X$使得$\widetilde{F}(x^*)\cap\widetilde{G}(x^*)\neq\varnothing$，从而存在$x^*\in X$使得$F(x^*)\cap G(x^*)\supseteq\widetilde{F}(x^*)\cap\widetilde{G}(x^*)\neq\varnothing$. 证毕.

推论 1 设X是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间E中的非空凸紧集，$F: X\to 2^X\backslash\varnothing$，如果存在$\widetilde{F}: X\to 2^X\backslash\varnothing$在$X$上 uhc 且满足$\forall\ x\in X,\widetilde{F}(X)\subset F(x)\widetilde{F}(x)$非空闭凸集. 则$\exists\ x^*\in X$，使得$x^*\in F(x^*)$.

证明 令$\widetilde{G}(x)=G(x)=\{x\},\forall\ \varphi\in E^*$；若$\inf\limits_{y\in X}\varphi(x-y)=0$，则$\forall\ y\in X,\varphi(x-y)\geqslant 0,\varphi(y-x)\leqslant 0$.

又$\widetilde{F}(x)\subset F(x)\subset X、\widetilde{G}(x)\subset X$故$\varphi(u-v)\leqslant 0\ (u\in\widetilde{F}(x),v\in\widetilde{G}(x))$，从而$\inf\limits_{\substack{u\in \widetilde{F}(x)\\ v\in \widetilde{G}(x)}}\varphi(u-v)\leqslant 0$，由定理 1$\exists\ x^*\in X$使得$F(x^*)\cap G(x^*)\neq\varnothing$，即$\exists\ x^*\in X$，使得$x^*\in F(x^*)$. 证毕.

注 3 推论 1 是在比[5]中定理 5 更弱条件下得到了[5]中定理 5 的部分结果.

由推论 1 可得下面的著名的 Kakutani 不动点定理.

推论 2[4] **(Kakutani)** 设X是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间E中的非空凸紧集，$F: X\to 2^X\backslash\varnothing$闭凸值上半连续映象，则$F$在$X$中存在不动点.

证明 令$\widetilde{F}(x)=F(x)$，由满足于引理 1，推论 1 的条件，故F在X中存在不动点.

例 令$E=(-\infty,\infty),X=[-1,1],F: X\to 2^E$如下

$$F(x)=\begin{cases}[\frac{1}{2},1]\cup Q_{0,1}, & \text{当 } x\in Q_{-1,1}\\ [\frac{1}{2},1]\cup\overline{Q}_{0,1}, & \text{当 } x\in\overline{Q}_{-1,1}\end{cases}$$

其中$Q_{\alpha,\beta}$表示$[\alpha,\beta]$中有理点集，$\overline{Q}_{\alpha,\beta}=[\alpha,\beta]\backslash Q_{\alpha,\beta}$，则$F: X\to 2^X\backslash\varnothing$.

1° $\forall\ \varphi\in E^*,\lambda\in R$，由$\varphi$的连续性及$Q_{0,1}$和$\overline{Q}_{0,1}$都在$[0,1]$中稠，得$\forall\ x\in X,\sup\limits_{u\in F(x)}\varphi(u)=\sup\limits_{u\in[0,1]}\varphi(u)$在$X$上 usc，故$F$在$X$上 uhc，

2° 设$H=(0,\infty),x_0\in\overline{Q}_{-1,1}$，则$H$是$E$中饮食$F(x_0)$的半平面，由于$x_0$的任何邻域$N(x_0)$内都含有$Q_{-1,1}$的点$x$，而$F(x)=[\frac{1}{2},1]\cup Q_{0,1}\not\subset H\ (0\in Q_{0,1}\backslash H)$故$F$在$X$上 udc.

3° 设$G(x)=\{x\}$；则$F、G$满足定理 1 的条件，事实上，令$\widetilde{F}(x)=[\frac{1}{2},1]$；$\widetilde{G}(x)=G(x)$即

可.由定理 1 $\exists x^* \in X$,使得 $F(x^*) \cap G(x^*) \neq \varnothing$,即 $x^* = F(x^*)$.

注 4 用 $Q_{0,1}, \bar{Q}_{0,1}$ 分别代替 $[\frac{1}{2}, 1] \cup Q_{0,1}, [\frac{1}{2}, 1] \cup \bar{Q}_{0,1}$ 上例的结论仍成立.

注 5 例中的 F、G 不满足[3]中定理 2.1(即引理 2)的条件,所以定理 1 是[3]中主要定理的推广.

注 6 上面的例也可利用推论 1 判别,但此例并不满足著名的集值映象的 Kakutani 不动点定理(推论 2)所需条件,这是因为 $F(x)$ 非闭凸.所以推论 1 是著名集值映象的 Kakutani 不动点定理的推广.

参 考 文 献

[1] Jiang Jiahe and Li Bingren, Acta Math. Sinica 23(1980), 327—329.

[2] Yu Jian, Two examples on continuity of multi—value mappings, J. of Math. Res. and Exposition 1 (1990), 44—46.

[3] Jiang Jiahe, Fixed point theorems for multi—valued mappings in locally convex spaces, 数学学报, 25 (1982), 365—373.

[4] J. P Aubin, Applied Functional Analysis, Wiley—Interscience, 1979, 355—367.

[5] 张石生、杨干山, Fan ky 极大极小不等式的进一步推广及对变分不等式的应用, 应用数学和力学, 11(1990), 961—968.

On the Upper Semicontinuous Mappings and Kakutani's Fixed Point Theorem

Dai Zhengde *Yang Ganshang*

(Dept. of Math., Yunnan University) (Dept. of Math., Yunnan National Institute)

Abstract

In this paper, we study the relationship between upper hemicontinuous multi- valued mappings (uhc) and upper demicontinuous multi-valued mappings (udc), we give the simple example which is uhc mappings but is not udc mappings, and get kakutani's fixed point theorem for uhc mappings.