第13卷第2期 1993年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 2 May 1993

SST空间中压缩映射的几个不动点定理*

孙 永 平

(浙江丽水师范专科学校,323000)

摘 要

本文给出了SST概率度量空间中压缩型映射的几个不动点定理,改进并推广了张石生[2],方锦暄[3]及陈肇姜[4]中的许多重要结果.

近年来,关于概率度量空间上压缩型映射的不动点问题已有较多的研究,但所研究的映射大都是定义在具连续 t—范数的 Menger 空间上.最近,陈肇姜[4]研究了SST概率度量空间上几类压缩型映射的不动点问题,推广了某些重要的结果.本文进一步在SST空间上研究几类更广泛的压缩型映射的不动点问题,所得结果改进并推广了文[2—4]中的某些主要结果.

以下用 R^+ 表非负实数全体,R 表实数全体,N 表自然数全体.关于SST空间的概念可参见[4],其它的一些记号、概念可参见[2,4].

定义1 设 T 为概率度量空间 (X,F) 上的自映射,称 T 为 X 上的(C)型、(D)型、(E)型及(CD)型映射,如果存在映射 $p,q:X\to N$, $p(x)\geqslant q(x)$, $\forall\ x\in X$,使对 $\forall\ x,y\in X, t\in R^+$,有下面的条件(C)、(D)、(E)、或(CD)成立:

(C) $F_{T^{p(x)}x,T^{q(x)}y}(t)\geqslant F_{x,y}(\Phi(t))$.

(D) $F_{T^{p(x)}x,T^{q(x)}y}(t)\geqslant\min\{F_{x,y}(\frac{t}{k}),F_{x,T^{p(x)}x}(\frac{t}{k}),F_{x,T^{q(x)}y}(\frac{t}{k})\}$, $0<k<1$.

(E) $F_{T^{p(x)}x,T^{q(x)}y}(t)\geqslant\min\{F_{x,y}(\Phi(t)),F_{x,T^{q(x)}y}(\Phi(t))\}$.

(CD) $F_{T^{p(x)}x,T^{q(x)}y}(t)\geqslant\min\{F_{x,y}(\Phi(t)),F_{x,T^{p(x)}x}(\Phi(t)),F_{x,T^{q(x)}y}(\Phi(t))\}$.

其中 $\Phi:R^+\to R^+$ 满足条件(Φ):$\Phi(0)=0$;$\Phi(t)$对 t 严格增;$\forall\ t>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi^n(t)=+\infty$,这里 $\Phi^n(t)$表 $\Phi(t)$的第 n 次迭代函数.

显然,(C)型、(D)型与(E)型均为(CD)型的特例.若 $p(x)=q(x)$, $\forall\ x\in X$,那么这里所定义的(C)型、(D)型和(CD)型分别是[4]中所定义的(A)型、(B)型和(AB)型.

引理1[3] 设 $\Phi:R^+\to R^+$ 满足条件(Φ)且左连续,那么

(i) $\Phi(t)>t$, $\forall\ t>0$;

(ii) 对$\forall\ t>0$, $\exists\ t_1,t_2\in R^+$, $0<t_2<t_1<t$,使 $\Phi(t_2)>t$.

引理2 设 T 为SST空间 (X,F,Δ) 上的(CD)型映射.对$\forall\ x_0\in X$, $\sup\limits_{t\in R}G_{x_0}(t)=1$,其中 $G_{x_0}(t)=\inf\limits_{n\in N}F_{x_0,T^nx_0}(t)$.那么序列$\{x_n=T^{p(x_{n-1})}x_{n-1}\}$为 X 中 Cauchy 列.

* 1991年1月3日收到.

证明 令 $p_i=p(x_i)$, $q_i=q(x_i)$, $\forall\ i\in N\cup\{0\}$. 对$\forall\ s\in N$, $t\in R^+$, 由(CD)式知

$$\begin{aligned}F_{x_i,T^s x_i}(t)&=F_{T^{p_{i-1}}x_{i-1},T^{q_{i-1}}(T^{s+p_{i-1}-q_{i-1}}x_{i-1})}(t)\\&\geqslant\min\{F_{x_{i-1},T^{s+p_{i-1}-q_{i-1}}x_{i-1}}(\Phi(t)),F_{x_{i-1},T^{p_{i-1}}x_{i-1}}(\Phi(t)),F_{x_{i-1},T^{s+p_{i-1}}x_{i-1}}(\Phi(t))\}\\&\geqslant G_{x_{i-1}}(\Phi(t)),\end{aligned}$$

从而

$$G_{x_i}(t)\geqslant G_{x_{i-1}}(\Phi(t)).$$

反复利用上式得

$$G_{x_i}\geqslant G_{x_{i-1}}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant G_{x_0}(\Phi^i(t)).$$

因此,对$\forall\ i,j\in N$,令 $s_0=p_{i+j-1}+\cdots+p_i$,有

$$x_{i+j}=T^{p_{i+j-1}+\cdots+p_i}x_i=T^{s_0}x_i.$$

由(CD)式,对$\forall\ t\in R^+$ 有

$$F_{x_i,x_{i+j}}(t)=F_{x_i,T^{s_0}x_i}(t)\geqslant G_{x_i}(t)\geqslant G_{x_0}(\Phi^i(t)).$$

对$\forall\ \varepsilon>0,\lambda>0$,取 $\lambda_1\in(0,\lambda)$,由$\sup\limits_{t\in R}G_{x_0}(t)=1$ 知$\exists\ t_1>0$ 使 $G_{x_0}(t_1)>1-\lambda_1$. 由条件(Φ),对 t_1,存在 $i_0\in N$,使当 $i\geqslant i_0$ 时,$\Phi^i(\varepsilon)\geqslant t_1$. 所以,当 $i\geqslant i_0$ 时,对$\forall\ j\in N$,有

$$F_{x_i,x_{i+j}}(\varepsilon)\geqslant G_{x_0}(\Phi^i(\varepsilon))\geqslant G_{x_0}(t_1)>1-\lambda_1>1-\lambda.$$

故$\{x_n=T^{p(x_{n-1})}x_{n-1}\}$为 X 中 Cauchy 列.

引理 3 设 T 为概率度量空间(X,F)上的(CD)型映射. 若有 $x^*\in X$ 使 $T^{p(x^*)}x^*=x^*$,则 x^* 是 T 的唯一不动点.

证明 1° 先证 $x^*=T^{q(x^*)}x^*$.

事实上,对$\forall\ t>0$,由(CD)式知

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)=F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)\geqslant F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(\Phi(t)).$$

反复利用上式知,对$\forall\ i\in N$,有

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)\geqslant F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(\Phi^i(t)).$$

令 $i\to\infty$得

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)=1\quad(\forall\ t>0).$$

故 $x^*=T^{q(x^*)}x^*$.

2° 由 1°知 x^* 是 $T^{p(x^*)}$ 与 $T^{q(x^*)}$ 的公共不动点,下证这样的点是唯一的.

事实上,若 $y^*\in X$ 使 $T^{p(x^*)}y^*=T^{q(x^*)}y^*$,那么对$\forall\ t>0$,有

$$F_{x^*,y^*}(t)=F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}y^*}(t)\geqslant F_{x^*,y^*}(\Phi(t)).$$

与 1°类似可证 $x^*=y^*$.

3° 下证 x^* 为 T 的唯一不动点.

事实上,$Tx^*=T(T^{p(x^*)}x^*)=T^{p(x^*)}(Tx^*)$. 同理 $Tx^*=T^{q(x^*)}(Tx^*)$. 故由 1°、2°知 $Tx^*=x^*$. 即 x^* 是 T 的一个不动点. 易知不动点是唯一的.

定理 1 设(X,F,Δ)为完备的 SST 空间,T 为 X 上的(CD)型映射. 如果

(i) 对$\forall\ x\in X$,$\sup\limits_{t\in R}G_x(t)=1$;其中 $G_x(t)=\inf\limits_{n\in N}F_{x,T^n x}(t)$;

(ii) $\Phi(t)$是左连续的.

那么

(a) 对$\forall\ x_0\in X$,$\{x_n=T^{p(x_{n-1})}x_{n-1}\}$收敛于$x^*\in X$;

(b) 若存在$t^*\in R^+$使$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t^*)=1$,那么$x^*$是$T$的唯一不动点,且对$\forall\ _0\in X$,迭代序列$\{T^nx_0\}$收敛于$x^*$.

证明 (a) 由引理 2 知$\{x_n=T^{p(x_{n-1})}x_{n-1}\}$是$X$中 Cauchy 列,由完备性知$\exists\ x^*\in X$使$x_n\to x^*$.

(b) 先证$x^*=T^{p(x^*)}x^*$.

事实上,由定理的条件知$\exists\ t^*\in R^+$使

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t^*)=1.$$

记

$$t_0=\inf\{t\,|\,F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)=1\}. \tag{1}$$

显然有$t_0\leqslant t^*$,下证$t_0=0$.

若$t_0>0$,那么由引理 1 知$\exists\ t_1,t_2\in R^+$,$0<t_2<t_1<t_0$,使$\Phi(t_2)>t_0$.于是由(1)式知,一方面有

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t_1)<1. \tag{2}$$

另一方面有

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(\Phi(t_2))=1.$$

又

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)\geqslant\Delta(F_{x^*,x_i}(\frac{t}{2}),F_{x_i,T^{q(x^*)}x^*}(\frac{t}{2}))\geqslant\Delta(F_{x^*,x_i}(\frac{t}{2}),G_{x_0}(\Phi^i(\frac{t}{2}))).$$

注意到$x_i\to x^*$,$G_{x_0}(\Phi^i(t))\to H(t)\ (i\to\infty)$,故有

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(t)\to H(t)\quad(i\to\infty),$$

从而

$$\begin{aligned}F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t_2)&\geqslant\min\{F_{x^*,x_i}(\Phi(t_2)),F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(\Phi(t_2)),F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(\Phi(t_2))\}\\&=\min\{F_{x^*,x_i}(\Phi(t_2)),F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(\Phi(t_2))\}\to1\quad(i\to\infty).\end{aligned}$$

因此

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t_1)\geqslant\Delta(F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t_1-t_2),F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t_2))\to1\quad(i\to\infty).$$

这表明$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t_1)\geqslant1$与(2)式矛盾.

故必有$t_0=0$,于是对$\forall\ t>0$,有$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)=1$.从而$x^*=T^{p(x^*)}x^*$.再由引理 3 知$x^*$是$T$的唯一不动点.下证对$\forall\ x_0\in X$,迭代序列$\{T^nx_0\}$收敛于$x^*$.

事实上,对$\forall\ n\in N$,$n\geqslant q(x^*)$,n可表示为

$$n=kq(x^*)+s,\quad 0\leqslant s<q(x^*).$$

于是对一切$t>0$,有

$$\begin{aligned}F_{x^*,T^nx_0}(t)=F_{T^{q(x^*)}x^*,T^{kq(x^*)+s}x_0}(t)&\geqslant\min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)),F_{x^*,T^{q(x^*)}x^*}(\Phi(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi(t))\}\\&=\min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi(t))\}.\end{aligned} \tag{3}$$

利用上式可得

$$F_{x^*,T^nx_0}(\Phi(t)) \geqslant \min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi^2(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi^2(t))\}. \tag{4}$$

将(4)代入(3)得

$$\begin{aligned}F_{x^*,T^nx_0}(t) &\geqslant \min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)),F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi^2(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi^2(t))\}\\ &= \min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi^2(t))\}.\end{aligned}$$

重复这一程序可证得对一切 $t>0,i\in N$,有

$$F_{x^*,T^nx_0}(t) \geqslant \min\{F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)),F_{x^*,T^nx_0}(\Phi^i(t))\}.$$

在上式中令 $i\to\infty$,注意到 $F_{x^*,T^nx_0}(\Phi^i(t))\to 1$ 得

$$F_{x^*,T^nx_0}(t) \geqslant F_{x^*,T^{(k-1)q(x^*)+s}x_0}(\Phi(t)).$$

反复利用上式得

$$F_{x^*,T^nx_0}(t) \geqslant F_{x^*,T^sx_0}(\Phi^k(t)),\ \forall\ t>0,\ k\in N.$$

在上式中令 $k\to\infty$(因而 $n\to\infty$)得

$$F_{x^*,T^nx_0}(t_0)\to 1\quad \forall\ t>0.$$

故 $T^nx_0\to x^*$.

注 1 在定理 1 中令 $q(x)=p(x),\forall\ x\in X,(X,F,\Delta)$为完备 Menger 空间,就得[3]中主要结果定理 1.

注 2 易知若轨道 $O_T(x)$概率有界,则必有$\sup\limits_{t\in R}G_x(t)=1$. 又由上述证明过程知,$\Phi(t)$的左连续性仅仅是在证明 $x^*=T^{p(x^*)}x^*$ 时才用到. 因此,如果 T 对压缩条件中的映射 p,q 而言是 p—连续的(见[4]),即当 $y_n\to y$ 时必有 $T^{p(y_n)}y_n\to T^{p(y)}y$. 那么定理 1 中的条件"$\exists\ t^*\in R^+$ 使 $F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t^*)=1$"可去. 事实上这时因有 $x^*=T^{p(x^*)}x^*$,因而对$\forall\ t>0$,均有 $F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)=1$. 故上述定理 1 是[4]中定理 7 的改进和推广,因而也是[2]中相应结果的改进和推广.

如果我们减弱 $\Phi(t)$的条件,即去掉 $\Phi(t)$的左连续性,加强压缩条件,即对(E)型压缩映射而言,有下面的

定理 2 设(X,F,Δ)为完备的 SST 空间,T 为 X 上的(E)型压缩映射,且对每一 $x\in X$,有$\sup\limits_{t\in R}G_x(t)=1$. 那么 T 在 X 中有唯一的不动点 x^* 且对$\forall\ x_0\in X$,序列$\{T^nx_0\}$收敛于 x^*.

证明 由定理 1 的证明过程知,仅仅是在证明 $x^*=T^{p(x^*)}x^*$ 时用到了 $\Phi(t)$的左连续性,所以只需重新证明 $x^*=T^{p(x^*)}x^*$ 即可.

由(E)式,对$\forall\ i\in N$,有

$$\begin{aligned}F_{x_i,T^{q(x^*)}x_i}(t) &= F_{T^{p(x_{i-1})}x_{i-1},T^{p(x_{i-1})+q(x^*)}x_{i-1}}(t)\\ &\geqslant \min\{F_{x_{i-1},T^{p(x_{i-1})-q(x_{i-1})+q(x^*)}x_{i-1}}(\Phi(t)),F_{x_{i-1},T^{p(x_{i-1})+q(x^*)}x_{i-1}}(\Phi(t))\}\\ &\geqslant G_{x_{i-1}}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant G_{x_0}(\Phi^i(t)),\quad \forall\ t>0.\end{aligned}$$

因 $G_{x_0}(\Phi^i(t))\to H(t)$, $(i\to\infty)$,所以 $F_{x_i,T^{q(x^*)}x_i}(t)\to H(t)$ $(i\to\infty)$. 于是对$\forall\ t>0$,

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t) \geqslant \Delta(F_{x^*,x_i}(\frac{t}{2}),F_{x_i,T^{q(x^*)}x_i}(\frac{t}{2}))\to 1\quad (i\to\infty).$$

进而

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t) \geqslant \Delta(F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(\frac{t}{2}),F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}(\frac{t}{2}))$$

$$\geqslant \Delta\Big(F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{t}{2}\Big),\min\Big\{F_{x^*,x_i}\Big(\Phi\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big),F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\Phi\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)\Big\}\Big)\to H(t)\ \ (i\to\infty).$$

故有 $F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)=H(t)$, $\forall\ t\in R$. 因此 $x^*=T^{p(x^*)}x^*$.

注 3 上述定理 2 是[3]中定理 3 的改进.

推论 1 设(X,F,Δ)为完备的 SST 空间,T 为 X 上的(C)型压缩映射,且对每一 $x\in X$,$\sup\limits_{t\in R}G_x(t)=1$. 那么 T 在 X 中有唯一不动点 x^*,且对$\forall\ x_0\in X$,序列$\{T^nx_0\}$收敛于 x^*.

注 4 [4]中的主要结果定理 1 是上述推论 1 的特例.

定理 3 设(X,F,Δ)为一完备 SST 空间,T 为 X 上的(D)型压缩映射. Δ 还满足(Δ_4):$\forall\ b\in[0,1]$,$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,b)=b$,且对每一 $x\in X$,$\sup\limits_{t\in R}G_x(t)=1$. 那么定理 2 的结论仍成立.

证明 令 $\Phi(t)=\dfrac{t}{k}$,显然 $\Phi(t)$满足条件(Φ_1)且 $\Phi(t)$是左连续的. 故由定理 1 知对$\forall\ x_0\in X$,$\{x_n=T^{p(x_{n-1})}x_{n-1}\}$收敛于 $x^*\in X$. 下面只要证明,存在 $t^*\in R$ 使 $F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t^*)=1$ 即可.

类似于定理 1 的证明易知,对$\forall\ s\in N$,有

$$F_{x_i,T^sx_i}(t)\geqslant G_{x_0}\Big(\frac{t}{k^i}\Big),\quad \forall\ i\in N.$$

特别有

$$F_{x_i,T^{q(x^*)}x_i}(t)\geqslant G_{x_0}\Big(\frac{t}{k^i}\Big).$$

于是,对$\forall\ t\in R^+$ 有

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t)\geqslant\Delta\Big(F_{x^*,x_i}\Big(\frac{t}{2}\Big),F_{x_i,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)\geqslant\Delta\Big(F_{x^*,x_i}\Big(\frac{t}{2}\Big),G_{x_0}\Big(\frac{t}{2k^i}\Big)\Big).$$

从而由 $F_{x^*,x_i}\big(\frac{t}{2}\big)\to H\big(\frac{t}{2}\big)=H(t)$, $G_{x_0}\big(\frac{t}{2k^i}\big)\to H(t)$ $(i\to\infty)$得

$$F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}(t)\to H(t),\quad i\to\infty.$$

取 $k_1\in(k,1)$,则有 $0<\dfrac{k}{k_1}<1$. 故对$\forall\ t>0$,有

$$F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{k}{k_1}t\Big)\geqslant\min\Big\{F_{x^*,x_i}\Big(\frac{t}{k_1}\Big),F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\Big(\frac{t}{k_1}\Big),F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{t}{k_1}\Big)\Big\}.$$

在上式中,$F_{x^*,x_i}\big(\frac{t}{k_1}\big)\to1$, $F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\big(\frac{t}{k_1}\big)\to1$ $(i\to\infty)$. 故当 i 充分大时,有

$$F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{k}{k_1}t\Big)\geqslant F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\Big(\frac{t}{k_1}\Big),\quad\forall\ t>0.$$

从而当 i 充分大时有

$$\begin{aligned}F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)&\geqslant\Delta\Big(F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\Big(1-\frac{k}{k_1}\Big)t\Big),F_{T^{p(x^*)}x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\frac{k}{k_1}t\Big)\Big)\\&\geqslant\Delta\Big(F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\Big(\Big(1-\frac{k}{k_1}\Big)t\Big),F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\Big(\frac{t}{k_1}\Big)\Big).\end{aligned}$$

上式右端令 $i\to\infty$,注意到 $F_{x^*,T^{q(x^*)}x_i}\big(\big(1-\frac{k}{k_1}\big)t\big)\to1$ 得

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t)\geqslant F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\Big(\frac{t}{k_1}\Big),\quad\forall\ t>0.$$

反复利用上式得,对$\forall\ i\in N$ 有

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t) \geqslant F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\left(\frac{t}{k_1^i}\right), \quad \forall\, t > 0.$$

令 $i\to\infty$，并注意到 $F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}\left(\frac{t}{k_1^i}\right)\to H(t)$ 得

$$F_{x^*,T^{p(x^*)}x^*}(t) = H(t).$$

因此由定理 1 知本定理成立.

注 4 文[3]中的定理 2 及文[4]中的定理 3 均是本定理的特殊情形.

参 考 文 献

[1] B. Schwarzer, A. Sklar, and Thorp E., Pacific J. Math., 10(1960), 673—675.

[2] 张石生，中国科学（A 辑），6(1983)，495—504.

[3] 方锦暄，淮北煤炭师院学报，2(1987)，8—14.

[4] 陈肇姜，南京大学学报，26(3)(1990)，385—391.

Several Fixed Point Theorems of Contractive Type Maps on SST Spaces

Sun Yongping

(Lishui Teachers College, Zhejiang)

Abstract

This paper gives some fixed point theorems of contractive type maps on SST probabilistic metric spaces. These results improve and generalize many important results in [2], [3], [4].