第13卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 13 No. 2
1993年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1993

关于解析函数的一个不等式*

凌怡　包革军　罗声政
(哈尔滨工业大学数学系,150006)

§1 引 言

设 $f(z)$ 在单位园盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析. $f(0)=1-f'(0)=0$,其全体记作 A. 令

$$\varphi(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\cdot z^{n+1},\quad z\in D,\ c\neq 0,-1,-2,\cdots.$$

$$L(a,c)f=\varphi(a,c)*f(z),\quad f(z)\in A,\tag{1}$$

这里 $(\lambda)_n=\Gamma(n+\lambda)/\Gamma(\lambda)$,"$*$"表示 Hadamard 乘积. 由[1]知,$L(a,c)$ 映 A 为它自身,而且若 $a\neq 0,-1,-2,\cdots$,则 $L(a,c)$ 有一个连续的逆 $L(c,a)$ 且是 A 到 A 的 1—1 映射. 显然 $L(a,a)$ 是单位算子且

$$L(a,c)=L(a,b)L(b,c)=L(b,c)L(a,b),\quad b,c\neq 0,-1,-2,\cdots.$$

另外,当 $c>a>0$ 时,有

$$L(a,c)f(z)=\int_0^1 u^{-1}f(uz)d\mu(a,c-a)(u),\tag{2}$$

其中 μ 是一个 β—分布:

$$d\mu(a,c-a)(u)=\frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}}{B(a,c-a)}du.$$

在[2],S. S. Miller 证明了一个广泛应用的不等式,即若 $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$ 在单位园 D 内解析,则 $\mathrm{Re}\{p(z)+\alpha zp'(z)\}>0$, $z\in D$ 可以推出 $\mathrm{Re}\{p(z)\}>0$ 对所有 $z\in D,\alpha\geqslant 0$ 成立.

由本文,我们得到了一个准确的值 $\varphi(\alpha,\beta)$,使得 $\mathrm{Re}\{p(z)+\alpha zp'(z)\}>\beta$, $z\in D$ 能推出 $\mathrm{Re}\{p(z)\}>\varphi(\alpha,\beta)$ 对所有 $z\in D,\alpha>0$ 和 $\beta<1$ 成立. 另外,通过运用这个结果,我们也得到许多有趣的性质和一个新的单叶判别性.

§2 主要结果

首先,我们引入如下引理.

引理 1[3] 设 $p(z)$ 在单位园 D 内解析且 $p(0)=1$. 如果 $\mathrm{Re}\{p(z)\}>0$,则

$$\mathrm{Re}\{p(z)\}>\frac{1-|z|}{1+|z|}$$

* 1991年4月22日收到.

对所有 $z\in D$ 成立.

用 $(p(z)-\beta)/(1-\beta)$ 代替引理 1 中的 $p(z)$,我们容易得到

引理 2 设 $p(z)$ 在单位园 D 内解析且 $p(0)=1$. 若 $\mathrm{Re}\{p(z)\}>\beta$,则

$$\mathrm{Re}\{p(z)\}>\frac{1+(2\beta-1)|z|}{1+|z|} \tag{3}$$

对所有 $z\in D,\beta<1$ 成立.

定理 1 设 $\alpha>0,\beta<1,p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$ 在单位园 D 内解析. 如果

$$\mathrm{Re}\{p(z)+\alpha zp'(z)\}>\beta,\quad z\in D, \tag{4}$$

则

$$\mathrm{Re}\{p(z)\}>(2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1),\quad z\in D. \tag{5}$$

其中 $F(a,b,c;x)$ 为超几何级数,这结果是准确的.

证明 令 $p(z)+\alpha zp'(z)=q(z)$,则 $q(z)=1+q_1z+q_2z^2+\cdots$ 在单位园 D 内解析. 运用(1),我们有

$$zq(z)=(1-\alpha)[zp(z)]+\alpha z[zp(z)]'=L(\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\alpha})[zp(z)].$$

也即

$$zp(z)=L(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1)[zq(z)].$$

从(4)我们能导出:$\mathrm{Re}\{q(z)\}>\beta$. 于是,运用(2)和引理 2,得

$$\mathrm{Re}\{p(z)\}=\mathrm{Re}\{\frac{1}{z}L(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1)[zq(z)]\}=\frac{1}{B(\frac{1}{\alpha},1)}\int_0^1u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{Re}\{q(uz)\}du$$

$$\geqslant\frac{1}{\alpha}\int_0^1u^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\frac{1+(2\beta-1)u}{1+u}du$$

$$=(2\beta-1)+2(1-\beta)[\frac{1}{\alpha}\int_0^1u^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+u)^{-1}du].$$

如果我们用超几何级数表示上式,则有

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^1u^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+u)^{-1}du=F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1).$$

这里

$$F(a,b,c;-1)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+t)^{-a}dt,$$

其中 $c>b>0$(参看[4](ch4,p169).

注意到函数 $p(z)=\{L(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1)[\frac{z+(1-2\beta)z^2}{1-z}]\}/z$ 满足(4),我们知道这结果是最好的可能.

取 $p(z)$ 为各种解析函数,我们能得到下列结果.

推论 1 设 $\alpha>0,\beta<1$ 和 $f(z)\in A$. 如果 $\mathrm{Re}\{(1-\alpha)\frac{f(z)}{z}+\alpha f'(z)\}>\beta,\quad z\in D,$

则

$$\mathrm{Re}\{\frac{f(z)}{z}\} > (2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1),\quad z\in D.$$

这结果是准确的.

推论 2 设 $\alpha>0,\beta<1$ 和 $f(z)\in A$. 如果 $\mathrm{Re}\{f'(z)+\alpha zf''(z)\}>\beta,\quad z\in D$,
则

$$\mathrm{Re}\{f'(z)\} > (2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1),\quad z\in D.$$

这结果是准确的.

注 1 当 $0\leqslant\beta<1$ 时,推论 1 和推论 2 是 Owa[5]相应结果的准确形式.

推论 3 设 $\beta<1,f(z)\in A$. 如果 $\mathrm{Re}\{f'(z)\}>\beta,\quad z\in D$,
则

$$\mathrm{Re}\{\frac{f(z)}{z}\} > (2\beta-1)+2(1-\beta)\ln 2,\quad z\in D.$$

这结果是准确的.

注 2 当 $0\leqslant\beta<1$ 时,这结果由 Owa 等[6]运用从属原理得到.

推论 4 设 $\alpha>0,\beta<1,f(z)\in A$. 如果 $\mathrm{Re}\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}+\alpha z(\sqrt{\frac{f(z)}{z}})'\}>\beta,\quad z\in D$,则

$$\mathrm{Re}\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\} > (2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1).$$

这结果是准确的.

推论 5 设 $\alpha>0,\beta<1,f(z)\in A$. 若

$$\mathrm{Re}\{\sqrt{f'(z)}+\alpha z(\sqrt{f'(z)})'\} > \beta,\quad z\in D,$$

则

$$\mathrm{Re}\{\sqrt{f'(z)}\} > (2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1).$$

这结果是准确的.

注 3 若 $0\leqslant\beta\leqslant1$ 时,这结果为 Owa[7]相应结果的准确形式.

我们知道,如果 $f(z)\in A$ 且 $\mathrm{Re}\{f'(z)\}>0$,则 $f(z)$是单叶的. 在下面定理里,我们给出了一个新的单叶判别法.

定理 2 设 $f(z)\in A$,如果

$$\mathrm{Re}\{f'(z)+\alpha zf''(z)\} > \delta,\quad z\in D,\alpha>0, \tag{6}$$

则 $f(z)$是单叶的. 这里

$$\delta = 1-\frac{1}{2}[1/(1-F(1,\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;-1))], \tag{7}$$

且常数 δ 不能被任何更小的数取代.

证明 设 $f(z)$满足(6),由定理 1 容易推出: $\mathrm{Re}\{f'(z)\}>0$. 这表明 $f(z)$是单叶的.

为了说明结果是准确的,我们考虑由 $zf_0(z)=L(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1)[\frac{z+(1-2\beta)z^2}{1-z}]$定义的函数 $f_0(z)$. 不难看出 $\mathrm{Re}\{f_0(z)+\alpha zf_0'(z)\}>\beta$. 如果 $\beta<\delta$,注意到

$$F(1,\frac{1}{a},\frac{1}{a}+1;-1)=\frac{1}{a}\int_0^1 u^{\frac{1}{a}-1}/1+u\cdot du<1,$$

则有

$$f_0(-1)=(2\beta-1)+2(1-\beta)F(1,\frac{1}{a},\frac{1}{a}+1;-1)$$

$$<(2\delta-1)+2(1-\delta)F(1,\frac{1}{a},\frac{1}{a}+1;-1)=0.$$

由此可说明 $\beta<\delta$ 时，$f_0(z)$非单叶的.

推论 6 设 $f(z)\in A$ 且

$$\mathrm{Re}\{f'(z)+zf''(z)\}>\frac{1-2\ln 2}{2-2\ln 2}\doteq-0.61,\quad z\in D,$$

则 $f(z)$是单叶的. 这结果是准确的.

参 考 文 献

[1] B. C. Carlson and D. B. Shaffer, SIAM J. Math. Anal., 15(1984), 737—745.

[2] S. S. Miller, Bull. Amer. Math. Soc., 81(1975), 79—81.

[3] T. H. Macgregor, Trans. Amer. Math. Soc., 104(1962), 532—537.

[4] 王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社,1979.

[5] S. Owa and M. Nunokawa, Math. Japonica, 33, No. 4(1988), 577—582.

[6] S. Owa, W. Wa and L. Liu, Bull. Korean Math. Soc., 25(1988), No. 2, 211—214.

[7] S. Owa and C. Y. Shen, Math. Japonica, 34, No. 3(1989), 409—412.

On an Inequality for Some Analytic Functions

Ling Yi *Bao Gejun* *Luo Shengzheng*

(Harbin Institute of Technology)

Abstract

Let $P(Z)=1+P_1Z+P_2Z^2+\cdots$ be an analytic function in the unit disc D. In this paper, we determine the value of $\varphi(\alpha,\beta)$ for which

$$\mathrm{Re}[P(Z)+\alpha ZP'(Z)]>\beta, Z\in D, \alpha>0, \beta<1$$

implies that $\mathrm{Re}\{P(Z)\}>\varphi(\alpha,\beta)$ for all $Z\in D$, and this result is sharp. Some of its interesting consequences are also given. In addition, we give a new univalence criterion.