第13卷第2期
1993年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 2
May 1993

拟线性椭圆方程广义解的 Liouville 定理*

王向东
(许昌师专数学系,许昌 461000)
梁鋆廷
(中山大学数学系,广州 510275)

摘 要

在 n 维欧氏空间 E^n 中考虑椭圆型方程

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u),$$

其中 $\vec{A}$、B 满足结构条件

$$\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant|\nabla u|^p,\quad p>1,$$

$$|\vec{A}(x,u,\nabla u)|\leqslant\varkappa|\nabla u|^{p-1},\quad \varkappa\geqslant1,$$

$$|B(x,u,\nabla u)|\leqslant b(x)|\nabla u|^\gamma,\quad p-1<\gamma<p,$$

$$b(x)\in L_\infty(E^n)\text{ 且 }b(x)=O(\frac{1}{|x|^{p-\gamma}}),\text{ 当 }|x|\to\infty.$$

本文证明了广义解的 Liouvill 定理成立.

§1 引言与基本假设

Liouville 定理是椭圆型方程解的一个重要性质并在椭圆方程组解的正则性理论中起重要作用[1-6]. 但是即使是单个的椭圆型方程情形,研讨在全空间 E^n 上的广义解的 Liouville 定理的文章也并不多见. 对于只有主部的散度型二阶线性椭圆型方程,借助广义解的 Harnack 不等式,已经可以得到广义解的 Liouville 定理[4,7]. [8]考虑了如下形式的椭圆型方程

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u), \tag{1}$$

其中 $\vec{A}(x,u,\xi)$ 和 $B(x,u,\xi)$ 在 $E^n\times E^1\times E^n$ 上定义且当 x 固定时关于 u、ξ 连续,当 u、ξ 固定时关于 x 可测且满足如下结构条件

$$\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\geqslant|\nabla u|^p,\quad p>1 \tag{2}$$

$$|\vec{A}(x,u,\nabla u)|\leqslant\varkappa|\nabla u|^{p-1},\quad \varkappa\geqslant1 \tag{3}$$

$$|B(x,u,\nabla u)|\leqslant b(x)|\nabla u|^{p-1}, \tag{4}$$

$$b(x)\in L_\infty(E^n)\text{ 且 }b(x)=O(\frac{1}{|x|}),\quad\text{当 }|x|\to\infty. \tag{5}$$

[8]中作出了广义解的振幅

$$\omega(\rho)=\operatorname*{Vraimax}_{B(\rho)}u-\operatorname*{Vraimin}_{B(\rho)}u,\ B(\rho)=\{|x|<\rho\} \tag{6}$$

的增长估计并由后者直接得到广义解的 Liouvllie 定理. 现在我们进一步考虑

$$|B(x,u,\nabla u|\leqslant b(x)|\nabla u|^\gamma,\quad p-1<\gamma<p, \tag{7}$$

* 1990年9月24日收到.

$$b(x) \in L^{\infty}(E^n) \text{ 且 } b(x) = O(\frac{1}{|u|^{p-\gamma}}), \quad \text{当 } |x| \to \infty \tag{5$'$}$$

的情形.

设 E^n 为 n 维欧氏空间，$n \geqslant 2$. 设对任何紧区域 $G \subset\subset E^n$，$u \in W_p^1(G) \cap L_{\frac{n(\gamma+1-p)}{p-\gamma}}(G)$ 并且满足

$$\int_G \{\nabla v \cdot \vec{A}(x,u,\nabla u) + vB(x,u,\nabla u)\} dx = 0, \ \forall\ v \in \dot{W}_p^1(G), \tag{8}$$

那么 u 称为是方程(1)的广义解.

§2 主要结果及证明

定理 设条件(2)、(3)、(5)$'$、(7)满足，设 u 是方程(1)的广义解并在整个 E^n 上有界，那么 u 恒等于常数.

为证定理成立，我们要利用下面的引理：

引理 1 设 u 是定理中出现的函数，那么对任何 $\rho > 0$，成立

$$\operatorname*{Vraimax}_{B(\rho)} u \leqslant \operatorname*{Vraimax}_{\partial B(\rho)} u, \tag{9}$$

其中 $\partial B(\rho)$ 记 $B(\rho)$ 的边界.

证明 设断言(9)不真，那么必有

$$M = \operatorname*{Vraimax}_{B(\rho)} u > \operatorname*{Vraimax}_{\partial B(\rho)} u = M_0.$$

设 $M_0 < k < M$，那么 $(u-k)^+ = \max(u-k, 0) \in W_p^1(B(\rho))$ 且 $(u-k)^+ = 0$ 在 $\partial B(\rho)$. 考虑到 $\partial B(\rho)$ 的光滑性，上式隐含了 $(u-k)^+ \in \overset{0}{W}{}_p^1(B(\rho))$. 在(8)中取 $G = B(\rho)$，$v = (u-k)^+$，那么利用结构条件(2)、(7)即得

$$\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p \leqslant \|b(x)\|_{L_\infty(E^n)} \int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} (u-k)|\nabla u|^\gamma dx. \tag{10}$$

实际上(10)式右端积分的有效区域只是 $B(\rho) \cap \{k < u < M\}$. 当 $p \geqslant n$ 时，取 $1 < p' < n$ 使 $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{n} = \frac{p-\gamma}{p}$，借助 Hölder 不等式的 Соболев 嵌入定理，我们有

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(\rho)} (u-k)^{+q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} &\leqslant c(n,p') \left(\int_{B(\rho)} |\nabla(u-k)^+|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant c(n,p') \cdot \operatorname{mes}^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} (B(\rho) \cap \{k < u < M\}) \left(\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

从而由(10)即得(对(10)右端应用 Hölder 不等式之后，两边消去 $\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p dx$)：

$$1 \leqslant c(n,p') \cdot \operatorname{mes}^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} (B(\rho) \cap \{k < u < M\}) \left(\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{\gamma+1-p}{p}}.$$

由于 $p \geqslant n > p'$，$\gamma > p-1$ 并且

$$\operatorname{mes} B(\rho) \cap \{k < u < M\} \to 0, \quad \text{当 } K \to M. \tag{11}$$

由上式即可得到矛盾. 如果 $1 < p < n$，那么我们有 $\frac{p-\gamma}{q} + \frac{\gamma+1-p}{t} + \frac{\gamma}{p} = 1$，其中

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad t = \frac{n(\gamma+1-p)}{p-\gamma} \tag{12}$$

应用 Hölder 不等式的 Соболев 嵌入定理，即得

$$\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} (u-k)|\nabla u|^\gamma dx = \int_{B(\rho)\cap\{k<u<M\}} (u-k)^{p-\gamma}(u-k)^{\gamma+1-p}|\nabla u|^\gamma dx$$

$$\leqslant \left(\int_{B(\rho)} (u-k)^{+q} dx \right)^{\frac{p-\gamma}{q}} \left(\int_{B(\rho)\cap\{k<u<M\}} |u|^t dx \right)^{\frac{\gamma+1-p}{t}} \left(\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{\gamma}{p}}$$

$$\leqslant c(n,p) \left(\int_{B(\rho)\cap\{k<u<M\}} |u|^t \right)^{\frac{\gamma+1-p}{t}} \left(\int_{B(\rho)\cap\{u>k\}} |\nabla u|^p dx \right). \tag{13}$$

联合(10)、(13)得 $1 \leqslant c(n,p) \| b \|_{L_\infty(R^n)} \left(\int_{B(\rho)\cap\{k<u<M\}} |u|^t dx \right)^{\frac{\gamma+1-p}{t}}$. 考虑到(12)以及 Lebesgue 积分的绝对连续性,命 $K \to M$,由上式再一次得到矛盾. 引理 1 证讫.

引理 2 设 $\rho_0 > \rho_1 > 0$, $\Omega = B(\rho_0) \backslash B(\rho_1)$,设 $S \subset \Omega$ 满足 mes $S \geqslant \theta$ mes Ω, $\theta \in (0,1)$. 设 $1 < p < n$, $u \in W_p^1(\Omega)$ 且 u 在 S 上取值为 O,那么 $\left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(n,p,\theta,\frac{\rho_0}{\rho_1}) \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$,其中的 q 由(12)给出(下同).

证明 通过一次伸缩变换并利用 Соболев 嵌入定理即得

$$\left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(n,p,\frac{\rho_0}{\rho_1}) \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + | \frac{u}{\rho_1}^p |] dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

为证得引理的断言,只需证

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant c(n,p,\theta,\frac{\rho_0}{\rho_1}) \rho_0^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx \tag{14}$$

成立. 用反证法证明. 设(14)不真,那么我们可以找到 $u_v \in W_p^1(\Omega)$, $u_v|S_v = 0$, $S_v \subset \Omega$ 并且满足 mes $S_v \geqslant \theta$ mes Ω,使

$$\int_\Omega |u_v|^p dx \geqslant \gamma \rho_0^p \left(\int_\Omega |\nabla u_v|^p dx \right) \tag{15}$$

通过对 u_v 规范化,不妨认为 $\int_\Omega |u_v|^p dx = 1$,那么由(15)知 u_v 在 $W_p^1(\Omega)$ 中保持有界,因而有子列. 不妨设是 u_v 自身在 $W_p^1(\Omega)$ 中弱收敛于某个 $u_0 \in W_p^1(\Omega)$. 根据(15),我们有

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^p dx \leqslant \lim_{v\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_v|^p dx = 0,$$

从而 u_0=constent. 由于 Соболев 嵌入算子的紧性,我们有 $\int_\Omega |u_v - u_0|^p dx \to 0, \quad v \to \infty$. 因而, $\int_\Omega |u_0|^p dx = \lim_{v\to\infty} \int_\Omega |u_v|^p dx = 1, u_0 = \text{costent} \neq 0$. 另外根据 u_v 的选择我们有

$$\int_\Omega |u_v - u_0|^p dx \geqslant \int_{S_v} |u_v - u_0|^p dx = \int_{S_v} |u_0|^p dx = |u_0|^p \cdot \text{mes } S_v \geqslant |u_0|^p \cdot \theta \text{ mes } \Omega > 0,$$

矛盾. 于是引理获证.

定理的证明 假设定理断言不真,那么一定有某个 $R > 0$ 使 $\omega(R) > 0$. 记

$$M(\rho) = \operatorname*{Vraimax}_{B(\rho)} u, \quad m(\rho) = \operatorname*{Vraimin}_{B(\rho)} u.$$

设 $\varepsilon > 0$, $\rho > R$,如果

$$\text{mes } (\{B(4\rho) \backslash B(3\rho)\}) \cap \{u < \frac{1}{2}(M(6\rho) + m(6\rho))\} \geqslant \frac{1}{2} \text{mes} \{B(4\rho) \backslash B(3\rho)\} \tag{16}$$

在 $B(6\rho)$ 上定义 $\omega = \ln \dfrac{\omega(6\rho)}{2(M(6\rho) + \varepsilon - u)}$,我们需证 w 在 $B(4\rho) \backslash B(3\rho)$ 上有和 ε、ρ 无关的上界.

据假定(5)′,我们可取 $\kappa_1 > 0$ 充分大,使

$$|b(x)| \leqslant \kappa_1 / \rho^{p-\gamma} \quad \text{当 } \rho \geqslant R. \tag{17}$$

设 $\zeta(x) = \zeta(|x|)$ 是 $|x|$ 的逐段线性的连续函数,满足

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| \leqslant \rho \text{ 和 } |x| \geqslant 6\rho \\ 1, & \text{当 } 2\rho \leqslant |x| \leqslant 5\rho, \end{cases}$$

对这样的ζ，成立$|\nabla\zeta(x)|\leqslant\frac{1}{\rho}$，取$v=\frac{\zeta^{\tau}e^{\sigma u}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}$，$\tau=\frac{p^2}{p-1}$，$\sigma>0$待定．因假定$u$有界，因而$v\in\overset{0}{W}{}_p^1(B(6\rho))$可以取作试验函数，代入(8)(取其中的$G=B(6\rho)$)给出

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}=0, \tag{18}$$

其中

$$\mathrm{I}=\int_{B(6\rho)}\frac{(p-1)\zeta^{\tau}e^{\sigma u}\nabla u}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{II}=\int_{B(6\rho)}\frac{\sigma\zeta^{\tau}e^{\sigma u}\nabla u}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{III}=\int_{B(6\rho)}\frac{\tau\zeta^{\tau-1}e^{\sigma u}\nabla\zeta}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{IV}=\int_{B(6\rho)}\frac{\zeta^{\tau}e^{\sigma u}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot B(x,u,\nabla u)dx.$$

利用结构条件(2)、(3)，我们即得

$$\mathrm{I}\geqslant(p-1)\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla\omega|^{p}dx,$$

$$\mathrm{II}\geqslant\sigma\int_{B(6\rho)}\frac{e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla u|^{p}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx,$$

$$\mathrm{III}\leqslant\tau\kappa\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau-1}|\nabla\zeta||\nabla\omega|^{p-1}dx\leqslant\delta\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla\omega|^{p}dx+c(\delta,\tau\kappa)\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\frac{p}{p-1}}|\nabla\zeta|^{p}dx.$$

其中$\delta>0$可为任何常数，$c(\delta,\tau\kappa)>0$则为依赖于δ、τ、κ的常数．根据(7)，(5)′我们有

$$\mathrm{IV}\leqslant\int_{B(6\rho)}\frac{e^{\sigma u}\zeta^{\tau}b(x)|\nabla u|^{\gamma}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx$$

$$\leqslant\delta\int_{B(6\rho)}\frac{e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla u|^{p}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx+c(\delta,\gamma)\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}b(x)^{\frac{1}{p-\gamma}}|\nabla w|^{p-1}dx.$$

借助 Young 不等式，继续有

$$c(\delta,\gamma)\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}b(x)^{\frac{1}{p-\gamma}}|\nabla w|^{p-1}dx\leqslant\delta\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}dx+c(\delta,\gamma,p)\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|b(x)|^{\frac{p}{p-\gamma}}dx.$$

联合以上结果并选$\delta>0$足够小，$\sigma>0$足够大，由(18)式我们可以解得

$$\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}dx\leqslant c\{\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\tau}|b(x)|^{\frac{p}{p-\gamma}}dx+\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\zeta^{\frac{p}{p-1}}|\nabla\zeta|^{p}dx\}, \tag{19}$$

其中常数$c>0$依赖于n,p,κ,γ．据$\zeta(x)$的定义，(19)右端的积分有效区域只是$B(6\rho)\backslash B(\rho)$，又假设$u$为有界，利用(17)，由(19)继续得

$$\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)}|\nabla w|^{p}dx\leqslant c\rho^{n-p}, \tag{20}$$

常数$c>0$现在还要依赖于κ_1([15]′中的常数)，由(16)有

$$\mathrm{mes}(\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{w\leqslant 0\})\geqslant\mathrm{mes}(\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{u\leqslant\frac{1}{2}[M(6\rho)+m(6\rho)]\})$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{mes}\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\geqslant\frac{1}{2}(\frac{4^n-3^n}{5^n})\mathrm{mes}B(5\rho). \tag{21}$$

取$S=\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{w\leqslant 0\}$，$\Omega=B(5\rho)\backslash B(2\rho)$，对$w^+$应用引理2，如果$1<p<n$，由(20)即得

$$\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)}w^{+}dx\leqslant c\rho^{n(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n})}(\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)}|w^{+}|^{q}dx)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\rho^{n}, \tag{22}$$

如果$p\geqslant n$，取$1<p'<n$和$\frac{1}{q'}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{n}$，据(20)再次有

$$\int_{B(5\rho)\setminus B(2\rho)} w^{+}dx \leqslant c\rho^{n(1-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{n})}\left(\int_{B(5\rho)\setminus B(2\rho)}|w^{+}|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\rho^{n(1-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{n})}\left(\int_{B(5\rho)\setminus B(2\rho)}|\nabla w^{+}|^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\leqslant c\rho^{n(1-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{n})}\operatorname{mes}^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}}B(5\rho)\left(\int_{B(5\rho)\setminus B(2\rho)}|\nabla w^{+}|^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant c\rho^{n}. \tag{22'}$$

设 $\eta(x)=\eta(|x|)$ 是 $|x|$ 的逐段线性连续函数，满足

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|\leqslant 3\rho-\rho_0 \text{ 或 } |x|\geqslant 4\rho+\rho_0\\ 1, & \text{当 } 3\rho-\rho_1\leqslant |x|\leqslant 4\rho+\rho_1\end{cases},$$

其中 $0<\rho_1<\rho_0\leqslant\rho$ 并且 $\rho\geqslant R$. 对这样的 η，成立 $|\nabla\eta(x)|\leqslant\frac{1}{\rho_0-\rho_1}$，对任意 $k\geqslant 0$，取

$$v=e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)^{+}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}},$$

其中 $\sigma>0$ 为待定常数，$\tau=\frac{p^2}{p-1}$，$(\omega-k)^{+}=\max(\omega-k,0)$. 因假设 u 有界，易见 $v\in\dot{W}_p^1(B(6\rho))$. 取这样的 v 作试验函数，代入(8)(取其中的 $G=B(6\rho)$)，给出

$$\mathrm{I}'+\mathrm{II}'+\mathrm{III}'+\mathrm{IV}'+\mathrm{V}=0, \tag{23}$$

其中

$$\mathrm{I}'=\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}\nabla(w-k)^{+}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{II}'=\int_{B(6\rho)}(p-1)e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)^{+}\nabla u}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{III}'=\int_{B(6\rho)}\sigma e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)^{+}\nabla u}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{IV}'=\int_{B(6\rho)}\tau e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau-1}(w-k)^{+}\nabla\eta}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx,$$

$$\mathrm{V}'=\int_{B(6\rho)}e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)^{+}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot B(x,u,\nabla u)dx.$$

由于包含有 η 和 $(w-k)^{+}$ 的因子，在 $\mathrm{I}'\sim\mathrm{V}'$ 中积分的有效区域只是 $\Omega(\rho_0,k)=\{B(4\rho+\rho_0)\setminus B(3\rho-\rho_0)\}\cap\{w>k\}$. 利用(2)、(3)、(7)我们可得如下估计式：

$$\mathrm{I}'=\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}\nabla u}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)dx\geqslant\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}|\nabla w|^{p}dx,$$

$$\mathrm{II}'\geqslant\int_{\Omega(k,\rho_0)}(p-1)e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla\omega|^{p}dx,$$

$$\mathrm{III}'\geqslant\int_{\Omega(k,\rho_0)}\sigma e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)|\nabla u|^{p}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx,$$

$$\mathrm{IV}'\leqslant\int_{\Omega(k,\rho_0)}\tau e^{\sigma u}\eta^{\tau-1}(w-k)^{+}|\nabla\eta|\kappa|\nabla w|^{p-1}dx$$

$$\leqslant\delta\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p}dx+c(\delta,\tau\kappa)\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\frac{p}{p-1}}(w-k)|\nabla\eta|^{p}dx,$$

$$\mathrm{V}'\leqslant\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)b(x)|\nabla u|^{\gamma}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx$$

$$\leqslant\delta\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\frac{\eta^{\tau}(w-k)|\nabla u|^{p}}{(M(6\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}dx+c(\delta,p,\gamma)\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)b(x)^{\frac{1}{p-\gamma}}|\nabla w|^{p-1}dx,$$

$$c(\delta,p,\gamma)\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)b(x)^{\frac{1}{p-\gamma}}|\nabla w|^{p-1}dx$$

$$\leqslant\delta\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla u|^{p}dx+c(\delta,p,\gamma)\int_{\Omega(k,\rho_0)}e^{\sigma u}\eta^{\tau}(w-k)b(x)^{\frac{p}{p-\gamma}}dx.$$

联合以上结果，选定 $\delta>0$ 足够小，$\sigma>0$ 足够大并注意 $b(x)$ 满足(17)，由(23)我们可解得

$$\int_{\Omega(k,\rho_0)} e^{\sigma u}\eta^{\tau}|\nabla w|^p dx \leqslant c\left(\frac{1}{(\rho_0-\rho_1)^p}+\frac{1}{\rho^p}\right)\int_{\Omega(k,\rho_0)} e^{\sigma u}\eta^{\frac{p}{p-1}}(w-k)dx,$$

其中的常数 $c>0$ 只依赖于 n,p,κ,γ 和 κ_1. 考虑到假设 u 有界，由上式继续得

$$\int_{\Omega(k,\rho_0)}|\nabla w|^p dx \leqslant c\left(\frac{1}{(\rho_0-\rho_1)^p}+\frac{1}{\rho^p}\right)\int_{\Omega(k,\rho_0)}(w-k)dx, \tag{24}$$

$$0<\rho_1<\rho_2\leqslant\rho,\quad \rho\geqslant R,$$

其中的常数 $C>0$ 现在还要依赖于 $\|u\|_{L_\infty(R^n)}$，但和 w、κ、ρ、ρ_0、ρ_1 无关.

根据(16)，取 $S=\{B(\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{w\leqslant k\}$，对 $(w-k)^+$ 应用引理 2，由于(24)，如果 $1<p<n$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)dx &\leqslant \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant c(n,p)\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}|\nabla(w-k)^+|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left[\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho}\right]\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned} \tag{25}$$

常数 $c>0$ 只依赖于 n、p、γ、κ、κ_1 和 $\|u\|_{L_\infty(R^n)}$.

如果 $p\geqslant n$，取 $1<p'<n$ 和 $\frac{1}{q'}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{n}$，应用引理 2 和(24)，继续有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)dx &\leqslant \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\\ &\leqslant c(n,p')\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}|\nabla(w-k)^+|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\mathrm{mes}^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\Omega(k,\rho_0)\left(\int_{\Omega(k,\rho_1)}|\nabla\omega|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left[\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho}\right]\left(\int_{\Omega(k,\rho_0)}(w-k)dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{25$'$}$$

现在的 $c>0$ 还依赖于 p'.

根据(25)或(25)$'$，对任何 $h>k\geqslant0$，成立

$$\begin{aligned}(h-k)\mathrm{mes}(h,\rho_1) &\leqslant \int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)dx\\ &\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left[\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho}\right]\left(\int_{\Omega(k,\rho_0)}(w-k)dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned} \tag{26$'$}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(h,\rho_1)}(w-h)dx &\leqslant \int_{\Omega(k,\rho_1)}(w-k)dx\\ &\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k,\rho_0)\left[\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho}\right]\left(\int_{\Omega(k,\rho_0)}(w-k)dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{27}$$

对 $v=0,1,2,\cdots$，置

$$\rho_v=\frac{\rho}{2^v},\ K_v=2H-\frac{H}{2^v}\quad (H>0\text{ 待定}),\ \Omega_v=\Omega(k_v,\rho_v),\quad J_v=\int_{\Omega(k_v,\rho_v)}(w-k_v)dx.$$

由于(26)、(27)中的常数 $c>0$ 和 w、k、ρ_0、ρ_1，ρ_2 都无关，分别由(26)、(27)得

$$\begin{aligned}&\frac{H}{2^{v+1}}\mathrm{mes}\ \Omega_{v+1}\leqslant C\cdot\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega_v(1+2^{v+1})\rho^{-1}J_v^{\frac{1}{p}}\\ &J_{v+1}\leqslant c\ \mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}\Omega_v(1+2^{v+1})\rho^{-1}J_v^{\frac{1}{p}},\quad v=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{28}$$

注意到(22)或(22)′隐含了

$$k\ \mathrm{mes}(\{B(5\rho)\backslash B(2\rho)\}\cap\{w>k\})\leqslant\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)}w^{+}dx\leqslant c\rho^{s},$$

常数 $c>0$ 和 w、k、ρ 无关，因而对任何予先给定的 $\theta>0$，可确定一个 $H_0>0$，使 $H\geqslant H_0$ 时成立

$$\mathrm{mes}\ \Omega_0=\mathrm{mes}(\{B(5\rho)\backslash B(2\rho)\}\cap\{w>H\})\leqslant\frac{C}{H_0}\rho^{s}. \tag{29}$$

与此同时

$$J_0=\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)\}\cap\{w>H\}}(w-H)dx\leqslant\int_{B(5\rho)\backslash B(2\rho)}|\omega|dx\leqslant\lambda\rho^{s}, \tag{30}$$

这里 λ 是出现在(22)或(22)′中的常数 c，它和 w、H，ρ 无关，由(28)～(30)，利用归纳法可证对任何正整数 v，成立

$$\mathrm{mes}\ \Omega_v\leqslant\delta^{v}\theta\rho^{s},\quad J_v\leqslant\delta^{v}\lambda\rho^{s}, \tag{31}$$

其中 $\delta^{\frac{1}{s}}4=1$，$\theta^{1-\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}4c\leqslant\lambda^{1-\frac{1}{r}}c$ (c 是(28)中的常数).

$$H>H_0\ 且\ \frac{\theta^{1-\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\lambda^{\frac{1}{r}}8C}{H_0}\leqslant\theta\delta. \tag{32}$$

据(31)，我们有 $\mathrm{mes}(\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{w>2H\})=\lim\limits_{v\to\infty}\mathrm{mes}\ \Omega_v=0$. 考虑到 w 的定义，由上式即得 $\underset{B(4\rho)\backslash B(3\rho)}{\mathrm{Varimax}}u\leqslant M(6\rho)+\varepsilon-\frac{1}{2}e^{-2H}\omega(6\rho)$. 令 $\varepsilon\to 0$ 并应用引理 1，由上式我们继续得

$$\underset{B(3\rho)}{\mathrm{Varimax}}\ u\leqslant\underset{\partial B(3\rho)}{\mathrm{Varimax}}\ u\leqslant\underset{B(4\rho)\backslash B(3\rho)}{\mathrm{Varimax}}\ u\leqslant M(6\rho)-\frac{1}{2}e^{-2H}\omega(6\rho),$$

从而

$$\omega(\rho)\leqslant\omega(3\rho)\leqslant(1-\frac{1}{2}e^{-2H})\omega(6\rho),\quad\rho\geqslant R. \tag{33}$$

若 $\mathrm{mes}(\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}\cap\{u\geqslant\frac{1}{2}[M(6\rho)+m(\rho)]\}\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{mes}\{B(4\rho)\backslash B(3\rho)\}$，则用完全类似的方法可证 $\widetilde{w}=-\ln\dfrac{\omega(6\rho)}{2(u+\varepsilon-m(6\rho))}\geqslant-2H\quad(H>0)$. 据此，我们再一次导得(33).

从(32)可见 H 和 ρ 无关，利用(33)迭代，即见存在常数 $c>0$，$\lambda>0$ 和 ρ、R 无关，使

$$\omega(\rho)\geqslant c(\frac{\rho}{R})^{\lambda}\omega(R),\quad\rho\geqslant R. \tag{34}$$

因假定 $\omega(R)>0$，上式隐含了 $\omega(\rho)\to\infty$，　$(\rho\to\infty)$. 这和 u 的有界性矛盾. 于是定理获证.

参 考 文 献

[1] M. Giaquinta, J. Nečas, *On the regularity of weak solutions to nonlinear elliptic systems of partial differential equations*, J. Reine Angew. Math., 316, 1980, 140—159.

[2] M. Giaquinta, J. Nečas, O. John, J. Stará., *On the regularity up to the boundary for second order nonlinear elliptic systems*, Pacific J. Math. 99, 1982, 1—17.

[3] J. Nečas, *On the solutions of the 19—th Hilbert's problem*, Recent Trends in Mathematics, Teubner—Texte Zur Mathematik, Bd. 50, Reinhardsbrunn, 1982, 214—223.

[4] J. Nečas, *Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations*, Teubner—Texte Zur Mathematik, Bd. 52, Leipzig, 1983.

[5] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. Math. Studies 105, princeton, 1983.

[6] M. Meier, *Liouville theorems partial regularity and Hölder continuity of weak solutions to quasilinear elliptic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 284, 1984, 371—387.

[7] J. Moser, *On the Harnack's theorems for elliptic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math., 14, 1961, 577—591.

[8] 梁鋈廷，椭圆型方程广义解的 Liouville 定理，数学研究与评论，Vol. 10, No. 2, 1990, 205—212.

The Liouville Theorem for the Generalized Solutions of Quasi-Linear Elliptic Equations

Wang Xiangdong *Liang Xiting*

(Xuchang Teachers College, Henan) (Zhongshan Univ., Guangzhou)

Abstract

It is shown that the Liouville theorem holds for the generalized solution of the equation in the n-dimensional space E^n

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{A}(x,u,\nabla u) \geq |\nabla u|^p, p>1, \\
&|\vec{A}(x,u,\nabla u)| \leq \chi|\nabla u|^{p-1}, \chi \geq 1, \\
&|B(x,u,\nabla u)| \leq b(x)|\nabla u|^\gamma, p-1<\gamma<p \\
&b(x) \in L_\infty(E^n) \text{ and } b(x)=O(\frac{1}{|x|^{p-\gamma}}) \text{ as } |x| \to \infty.
\end{aligned}
$$