第13卷第2期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 2
1993年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1993

一类具混合变元的一阶中立型微分方程的解振动的充要条件*

郑步南 (广西师范大学数学系,桂林 541004)
王汝凉 (广西师范学院数学系,南宁 530001)

考虑一阶中立型方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+px(t-r)]+qx(t+\tau)=0, \tag{1}$$

其中 p、q、τ 均为实常数,$r>0$,$\tau>0$.

方程(1)的特征方程是

$$f(\lambda)\stackrel{\triangle}{=}\lambda+p\lambda e^{-\lambda r}+qe^{\lambda\tau}=0. \tag{2}$$

引理 1 方程(1)的所有解都振动的充要条件是特征方程(2)无实根[3].

§1 $q>0$ 的情形

引理 2 特征方程(2)无实根的充要条件是对任意实数 λ 有 $f(\lambda)>0$.

证明 充分性显然成立. 只要证必要性,假如对任意实数 λ,$f(\lambda)>0$ 不真,则有实数 λ_0,使 $f(\lambda_0)<0$,而 $f(0)=q>0$,故在 0 与 λ_0 之间必有 $f(\lambda)=0$ 的实根,矛盾.

定理 1 方程(1)所有解振动的必要条件是 $p<0$.

证明 只要证 $p\geqslant 0$ 时方程(1)至少有一个非振动解. 事实上,当 $p\geqslant 0$ 时,$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}f(\lambda)=-\infty$,而 $f(0)=q>0$,说明特征方程(2)至少有一个实根 $\lambda=\lambda_0$,从而方程(1)至少有一个非振动解 $x(t)=e^{\lambda_0 t}$.

定理 2 若常数 $K,B,H(K>0,B>0,H-B>0)$ 满足

$$r(H-B)=e^{-(Kr+1)}, \tag{3}$$

则当 $p<0$ 时,方程(1)所有解振动的充分条件是

$$q>\frac{Kr}{r+\tau}\left(\frac{K\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{\tau}{r}}+\frac{-p}{r+\tau}\exp[-1-H(r+\tau)/p]. \tag{4}$$

证明 引入可调参数 $K>0,B>0,H(H-B>0)$ 及待定常数 $a>0,b>0(a+b=1)$,把 $f(\lambda)$ 写为 $f(\lambda)\stackrel{\triangle}{=}f_1(\lambda)+f_2(\lambda)+f_3(\lambda)e^{-\lambda r}$,其中 $f_1(\lambda)=\lambda+(H-B)e^{-\lambda r}+K$;$f_2(\lambda)=-K+Be^{-\lambda r}+aqe^{\lambda\tau}$;$f_3(\lambda)=p\lambda-H+bqe^{\lambda(r+\tau)}$. 要 $f(\lambda)>0$,$\lambda\in(-\infty,+\infty)$,只要

$$r(H-B)=e^{-(Kr+1)}$$

* 1991年4月15日收到.

$$aq > \frac{K\tau}{r+\tau}\left(\frac{K\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{\tau}{r}} \stackrel{\triangle}{=} A_1 > 0 \tag{5}$$

$$bq > \frac{-p}{r+\tau}\exp[-1-H(r+\tau)/p] \stackrel{\triangle}{=} A_2 > 0. \tag{6}$$

取 $a=\frac{A_1}{A_1+A_2}>0$，$b=\frac{A_2}{A_1+A_2}>0$ $(a+b=1)$，则(5)、(6)等价于

$$q > \frac{K\tau}{r+\tau}\left(\frac{K\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{\tau}{r}} + \frac{-p}{r+\tau}\exp[-1-H(r+\tau)/p].$$

定理 3 若 $-\frac{r+\tau}{(2r+\tau)e}<p<0$，则方程(1)所有解振动的充要条件是

$$q > \frac{-p}{r+\tau}e^{K(r+\tau)+\frac{\tau}{r}+1} + \frac{K\tau}{K+\tau}e^{K\tau+\frac{\tau}{r}}, \tag{7}$$

其中 $K>0$ 满足

$$\left(\frac{-K\tau}{r+\tau}-\frac{1}{r}\right)e^{-(Kr+1)} = pK + \frac{p}{r} + \frac{p}{r+\tau}. \tag{8}$$

证明 在定理的条件下不难知道，方程(8)有唯一解 $K>0$.

充分性 只要将定理 2 充分条件(4)中的可调常数 K,B,H 作如下选择，使其满足

$$\left.\begin{aligned} -1-H(r+\tau)/p &= \left(-K-\frac{1}{r}\right)(-\tau-r) \\ \frac{B(r+\tau)}{K\tau} &= e^{-Kr-1} \\ (H-B)r &= e^{-(Kr+1)} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

即得证.

必要性 只要证对满足(8)式的 K，若条件(7)不成立，即 $q\leqslant\frac{-p}{r+\tau}e^{K(r+\tau)+\frac{\tau}{r}+1}+\frac{K\tau}{r+\tau}e^{K\tau+\frac{\tau}{r}}$ 时，方程(1)至少有一个非振动解. 事实上，$f\left(-K-\frac{1}{r}\right)=0$，$f(0)=q>0$. 说明特征方程(2)至少有一个实根 $\lambda=\lambda^*$，从而方程(1)至少有一个非振动解 $x(t)=e^{\lambda^* t}$.

§2 $q<0$ 的情形

为方便计，把方程(1)写成

$$\frac{d}{dt}[x(t)+px(t-r)]-qx(t+\tau)=0, \tag{1$'$}$$

其中 $q>0$，$p\in R$，r、τ 均为大于零的实数.

方程(1)$'$的特征方程为

$$F(\lambda) \stackrel{\triangle}{=} \lambda + p\lambda e^{-\lambda r} - qe^{\lambda\tau} = 0. \tag{2$'$}$$

类似于引理 2 的证明得到

引理 3 特征方程(2)$'$无实根的充要条件是对任意的实数 λ 有 $F(\lambda)<0$.

定理 4 方程(1)$'$振动的必要条件是 $p\geqslant 0$.

证明 只要证若 $p<0$，方程(1)$'$至少有一个非振动解. 事实上，$p<0$ 时，$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}F(\lambda)=+\infty$，

而 $F(0)=-q<0$，说明特征方程(2)′至少有一个实根 $\lambda=\lambda_0$，从而方程(1)′至少有一个非振动解 $x(t)=e^{\lambda_0 t}$.

定理 5 当 $p>0$ 时，方程(1)′振动的充分条件是

$$q\tau > e^{K\tau-1} + Br\left(\frac{K_2\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{r+\tau}{r}}, \tag{10}$$

其中实数 $K>0, B>0$，且使

$$K_2 = K_1 - K = -K + \frac{p}{r}e^{-1+Br/p} > 0.$$

证明 引入可调参数 $K>0, K_1>0, K_2>0, K_1=K_2+K, B>0$ 及待定常数 $a>0, b>0$ $(a+b=1)$. 把 $F(\lambda)$ 写成

$$F(\lambda) \overset{\triangle}{=} F_1(\lambda) + F_2(\lambda)e^{-\lambda r} + F_3(\lambda),$$

其中 $F_1(\lambda)=\lambda-aqe^{\lambda\tau}+K, F_2(\lambda)=p\lambda-K_1e^{\lambda r}+B, F_3(\lambda)=K_2-bqe^{\lambda\tau}-Be^{-\lambda r}$.

要 $F(\lambda)<0, \lambda\in(-\infty,+\infty)$，只要

$$aq\tau > e^{K\tau-1} \overset{\triangle}{=} A_1 > 0, \tag{11}$$

$$K_1 = \frac{p}{r}e^{-1+Br/p},$$

$$bq\tau > Br\left(\frac{K_2\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{r+\tau}{r}} \overset{\triangle}{=} A_2 > 0. \tag{12}$$

取 $a=\frac{A_1}{A_1+A_2}>0$，$b=\frac{A_2}{A_1+A_2}>0$ $(a+b=1)$，则(11)、(12)都等价于

$$q\tau > e^{K\tau-1} + Br\left(\frac{K_2\tau}{B(r+\tau)}\right)^{\frac{r+\tau}{r}}.$$

定理 6 若 $p\geqslant\frac{r-\tau}{\tau}e>0$ 时，则方程(1)′振动的充分必要条件是

$$q\tau > \left[1 + pr\left(K + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tau}\right)e^{Kr-\frac{r}{\tau}}\right]e^{K\tau-1}, \tag{13}$$

其中 $0<\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}\leqslant K<\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau+r}$ 满足

$$K = \frac{p(\tau+r)}{\tau}\left[-K - \frac{1}{\tau+r} + \frac{1}{\tau}\right]e^{Kr-\frac{r}{\tau}}. \tag{14}$$

证明 在定理条件下不难知道方程(14)有唯一正解 K：

$$0 < \frac{1}{\tau} - \frac{1}{r} \leqslant K < \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+r}.$$

充分性 只要将定理 5 的充分条件(10)中的可调参数 K, B, K_2 作如下选择，使其满足

$$K - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{r}\ln\frac{K_2\tau}{B(\tau+r)},$$

$$K - \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{r} + \frac{B}{p},$$

$$K_2 = -K + \frac{p}{r}e^{-1+Br/p},$$

即可得证.

必要性 只要证对满足(14)式的 K，若条件(13)不成立，即

$$q\tau \leqslant \left[1 + pr\left(K + \frac{1}{r} - \frac{1}{\tau}\right)e^{Kr - \frac{r}{\tau}}\right]e^{K\tau - 1}$$

时，方程(1)′至少有一个非振动解.

事实上，这时 $F(-K+\frac{1}{\tau})\geqslant 0$，而 $F(0)=-q<0$，说明特征方程(2)′至少有一个实根 $\lambda=\lambda^*$，从而方程(1)′至少有一个非振动解 $x(t)=e^{\lambda^* t}$.

参 考 文 献

[1] 钱祥征，一类中立型微分方程振动的充分必要条件，科学通报(1988)，885—889.

[2] G. Ladas and I. P. Stavroulakis, J. Diff. Eqs. 44(1982), 134—152.

[3] E. A. Grove and G. Ladas, J. Math. Anal. Appl 126(1987), 341—350.

The Necessary and Sufficient Condition for the Vibration of the Solution to a First Order Neutral Differential Equation of Mixed Variables

Zheng Bunan (Guangxi Normal University, Guilin)

Wang Rujing (Guangxi Teachers College, Nanning)

Abstract

This paper deals with the vibration of the class of the neutral differential equations of the first order, containing mixed variable. It gives the algebraic criterion of the equation vibration with a necessary and sufficient condition.