第13卷第2期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 2
1993年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1993

p—除环上矩阵秩的恒等式*

李 桃 生
(华中师范大学数学系,武汉 430070)

本文证明了[1]中的猜测:在 p—除环上有恒等式

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r((I_s - BB^+)C(I_n - A^+A)),$$

并且改进了这个结果,此外还给出了几个关于矩阵秩的恒等式.

设 Ω 是 p—除环,A 是 Ω 上的 $m\times n$ 矩阵. $\mathscr{M}(A)$表示由 A 的行向量张成的 Ω 上的左向量空间,$\mathscr{N}(A)$表示满足 $XA=0$ 的行向量张成的 Ω 上的左向量空间, 则 $\mathscr{M}(A)\subseteq\Omega_n$,$\mathscr{N}(A)\subseteq\Omega_m$,$\mathscr{M}(A)$、$\mathscr{N}(A)$、$\Omega_m$、$\Omega_n$ 都是左 Ω—模,并且 $\dim\mathscr{N}(A)=m-r(A)$.

引理 1 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m\times n$、$m\times s$ 和 $s\times n$ 矩阵,那么

1° $\mathscr{N}(A)\cap\mathscr{N}(B)=\mathscr{N}(A,B)$;

2° $\mathscr{M}(A)+\mathscr{M}(C)=\mathscr{M}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$.

引理 2 A、B 分别是 Ω 上的 $m\times n$ 和 $s\times n$ 矩阵,那么

$$\dim(\mathscr{M}(A)\cap\mathscr{M}(B)) = r(A) + r(B) - r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

引理 3 A 是 Ω 上 $m\times n$ 矩阵,A^+ 是 A 的(强)广义逆矩阵,那么

$$r(I_n - A^+A) = n - r(A);\ r(I_m - AA^+) = m - r(A).$$

引理 4 A 是 Ω 上的 $m\times n$ 矩阵,则

$$\mathscr{N}(A) = \mathscr{M}(I_m - AA^+);\ \mathscr{M}(A) = \mathscr{N}(I_n - A^+A).$$

证明 $(I_m-AA^+)A=0$,则

$$\mathscr{M}(I_m-AA^+)\subseteq\mathscr{N}(A);\ \dim\mathscr{M}(I_m-AA^+)=r(I_m-AA^+)=m-r(A)=\dim\mathscr{N}(A).$$

所以,$\mathscr{N}(A) = \mathscr{M}(I_m - AA^+)$. 又因为

$$A(I_n-A^+A)=0,\ \dim\mathscr{N}(I_n-A^+A)=n-(n-r(A))=r(A),$$

所以,$\mathscr{M}(A) = \mathscr{N}(I_n - A^+A)$.

定理 1 A、B 分别是 Ω 上的 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵,那么

$$r(AB) = r(A) - \dim(\mathscr{N}(B)\cap\mathscr{M}(A)) = r(A) + r(B, I_n - A^+A) - n$$

$$= r(B) + r\begin{pmatrix} A \\ I_n - BB^+ \end{pmatrix} - n$$

证明 1° 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 A 的 m 个行向量,规定 $\varphi:A_i\to A_iB$,则 φ 是 $\mathscr{M}(A)$到 $\mathscr{M}$

* 1991年2月8日收到. 1992年11月17日收到修改稿.

(AB)的 Ω—同态满射，并且 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathscr{N}(B) \cap \mathscr{M}(A)$. 所以

$$\mathscr{M}(A)/(\mathscr{N}(B) \cap \mathscr{M}(A)) \cong \mathscr{M}(AB).$$

$$\dim\mathscr{M}(AB) = \dim\mathscr{M}(A) - \dim(\mathscr{N}(B) \cap \mathscr{M}(A))$$

$$r(AB) = r(A) - \dim(\mathscr{N}(B) \cap \mathscr{M}(A)).$$

2° $$\dim(\mathscr{N}(B)\cap\mathscr{M}(A))=\dim(\mathscr{N}(B)\cap\mathscr{N}(I_n-A^+A))$$
$$=\dim(\mathscr{N}(B,I_n-A^+A))=n-r(B,I_n-A^+A).$$

所以

$$r(AB) = r(A) + r(B,I_n - A^+A) - n.$$

3° $$\dim(\mathscr{N}(B)\cap\mathscr{M}(A))=\dim(\mathscr{M}(I_n-BB^+)\cap\mathscr{M}(A))$$
$$=r(I_n-BB^+)+r(A)-r\begin{pmatrix} A \\ I_n-BB^+ \end{pmatrix}=n-r(B)+r(A)-r\begin{pmatrix} A \\ I_n-BB^+ \end{pmatrix}.$$

所以

$$r(AB) = r(B) + r\begin{pmatrix} A \\ I_n - BB^+ \end{pmatrix} - n.$$

定理 2 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m\times n$、$s\times t$、$s\times n$ 矩阵，那么

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B,C(I_n - A^+A)) = r(B) + r\begin{pmatrix} A \\ (I_s - BB^+)C \end{pmatrix}.$$

证明

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\right] = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} - \dim\left(N\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \cap M\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\right)$$

1° 因为

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n - A^+A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以，

$$\mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \subseteq \mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n - A^+A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

而

$$\dim\mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n - A^+A \\ 0 \end{pmatrix} = (n + s) - r(I_n - A^+A) = s + r(A) = \dim\mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

因此

$$\mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n - A^+A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\dim\left(\mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \cap \mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\right) = \dim\left(\mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \cap \mathscr{M}\begin{pmatrix} I_n - A^+A \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \dim\mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 & I_n - A^+A \\ C & B & 0 \end{pmatrix}.$$

又因为

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -C & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 & I_n - A^+A \\ C & B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & I_n - A^+A \\ 0 & B & -C(I_n - A^+A) \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} &= s + r(A) - \left[n + s - r\begin{pmatrix} I_n & 0 & I_n - A^+A \\ 0 & B & -C(I_n - A^+A) \end{pmatrix}\right] \\ &= r(A) - n + [n + r(B, -C(I_n - A^+A))] \\ &= r(A) + r(B, C(I_n - A^+A)). \end{aligned}$$

2° 因为

$$(-(I_s - BB^+)C, I_s - BB^+)\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = (0, 0),$$

$$r(-(I_s - BB^+)C, I_s - BB^+) = r(I_s - BB^+) = \dim \mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathscr{M}(-(I_s - BB^+)C, I_s - BB^+) = \mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} &\dim\left(\mathscr{N}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \cap \mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\right) = \dim\left(\mathscr{M}(-(I_s - BB^+)C, I_s - BB^+) \cap \mathscr{M}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\right) \\ &= r(-(I_s - BB^+)C, I_s - BB^+) + r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \\ -(I_s - BB^+)C & I_s - BB^+ \end{bmatrix} \\ &= r(I_s - BB^+) + s + r(A) - \left[s + r\begin{pmatrix} A \\ (I_s - BB^+)C \end{pmatrix}\right] \\ &= s + r(A) - r(B) - r\begin{pmatrix} A \\ (I_s - BB^+)C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是有

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(B) + r\begin{pmatrix} A \\ (I_s - BB^+)C \end{pmatrix}.$$

定理 3 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m \times n$、$s \times t$、$s \times n$ 矩阵，则

$$r(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) = r(B, C(I_n - A^+A)) - r(B).$$

证明

$$\begin{aligned} r(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) &= r(I_s - BB^+) - \dim(\mathscr{N}(C(I_n - A^+A)) \cap \mathscr{M}(I_s - BB^+)) \\ &= s - r(B) - \dim(\mathscr{N}(C(I_n - A^+A)) \cap \mathscr{N}(B)) = s - r(B) - \dim(\mathscr{N}(B, C(I_n - A^+A))) \\ &= s - r(B) - [s - r(B, C(I_n - A^+A))] = r(B, C(I_n - A^+A)) - r(B). \end{aligned}$$

由定理 2 和定理 3 立即可以推出：

推论 1 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m \times n$、$s \times t$、$s \times n$ 矩阵，那么

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A).$$

这就是[1]中的猜想.

推论 2 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m\times n$、$s\times t$、$s\times n$ 矩阵，那么 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ 的充分必要条件是 $(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) = 0$.

推论 3 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m\times n$、$s\times t$、$s\times n$ 矩阵，那么

$$r(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) = r\begin{pmatrix} A \\ (I_s - BB^+)C \end{pmatrix} - r(A).$$

证明 由定理 2 和定理 3 立即可得.

推论 4 A、B、C 分别是 Ω 上的 $m\times n$、$s\times t$、$s\times n$ 矩阵，那么

1° $r(I_s-(I_s-BB^+)^+(I_s-BB^+),C(I_n-A^+A))=r(B,C(I_n-A^+A))$;

2° $r\begin{pmatrix} I_n-(I_n-A^+A)(I_n-A^+A)^+ \\ (I_s-BB^+)C \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A \\ (I_s-BB^+)C \end{pmatrix}$.

证明 1° 由定理 1

$$r(I_s-BB^+)C(I_n-A^+A)=r(I_s-BB^+)+r(C(I_n-A^+A),I_s-(I_s-BB^+)^+(I_s-BB^+))-S$$
$$=r(C(I_n-A^+A),I_s-(I_s-BB^+)^+(I_s-BB^+))-r(B).$$

由定理 3，

$$r(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) = r(B,C(I_n - A^+A)) - r(B).$$

所以 1°的等式成立.

由定理 1 及推论 3 可证 2°的等式成立.

参 考 文 献

[1] 屠伯埙，数学研究与评论，10:3(1990)，327—332.
[2] 屠伯埙，数学学报，29:2(1986)，246—248.
[3] 熊全淹，近世代数，上海科学技术出版社，1978.
[4] T. W. Hungerford，代数学，冯克勤译，湖南教育出版社，1985.
[5] Haynsworth, E. V. , Lin. Alg. Appl. , 1(1968), 73—81.
[6] 李桃生，范畴与同调代数基础，华中师范大学出版社，1988.

Identities on the Rank of Matrices over p-Division Rings

Li Taosheng
(Dept. of Math., Central China Normal University, Wuhan)

Abstract

We derive some identities on the rank of matrices over p-division ring.