第13卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 13 No. 2
1993年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1993

关于有限群两个超可解子群之积的问题*

王　品　超
(山东曲阜师范大学数学系,273165)

§1　引　言

定义 1　设 H 是 G 的子群,如果 H 同 G 的任一子群可交换,称 H 在 G 中拟正规.

定义 2　设 H,K 为 G 的子群,如果 H 同 K 中任一子群可交换,称 H 在 K 中拟正规.

我们知道两个正规子群之积不一定为超可解子群.在[1]中,Baer 证明了,如果 G 为两个正规超可解子群之积,且 G' 幂零,则 G 为超可解群;在[2]中 Friesen 证明了两个指数互质的正规的超可解子群之积仍为超可解群;在[3]中 Kegel 证明了如果 $G=HK=HL=KL$,而 H,K 为幂零子群,L 为超可解子群,则 G 为超可解子群;在[4]中樊恽证明了如果 G 为两个正规的超可解子群 A,B 之积,且 $[A\ B]$ 幂零,则 G 为超可解群;在[5]中 Asaad 和 Shaalan 证明了如下问题:i)如果 H 和 K 为 G 的超可解子群,$G=HK$,$[|H|,|K|]=1$,又 H 在 K 中拟正规,K 在 H 中拟正规,则 G 为超可解群;ii)设 H,K 为 G 的超可解子群,$G=HK$,又 H 的每一个子群在 K 中拟正规,则 G 为超可解群;iii)设 H 为 G 的幂零子群,K 为超可解子群,$G=HK$,又 H 在 K 中拟正规,K 在 H 中拟正规,则 G 为超可解群;iv)设 H、K 为 G 的指数互质的超可解子群,且每对素数 $\{p\ q\}$,$p>q$,其中之一为 $|G:K|$ 与 $|G:H|$ 的因子,$p\not\equiv 1(q)$,又 H 在 K 中拟正规,K 在 H 中拟正规,则 G 为超可解群;v)设 H,K 为 G 的超可解子群,G' 幂零且 $G=HK$,又 H 在 K 中拟正规,K 在 H 中拟正规,则 G 为超可解群.

本文又给出了两个超可解子群之积为超可解群的几个充分条件,并推广了部分已知结果.

§2　基本结果

定理 1　　设 $G=HK$,$(|H|,|K|)=1$,这里 H、K 为超可解子群,若 H 同 K 的任一极大子群可交换,K 与 H 的任一极大子群可交换,则 G 为超可解群.

证明　设 P 为 $|G|$ 中最大质因子,由于 $(|H|,|K|)=1$,可设 $P\leqslant H$,这里 $P\in \mathrm{syl}_pG$. 由于 H 为超可解群,因而 $P\leq H$) (因为 $P\in \mathrm{syl}_pH$),故 $N_G(P)\geqslant H$,即 $N_G(P)=N_G(P)\cap G=N_G(P)\cap(HK)=H\cdot(N_G(P)\cap K)$. 若 $P\leq G$,则有 $N_G(P)\cap K\leqslant M<K$,这里 M 为 K 的极大子群,因为 K 为超可解子群,故有 $[K:M]=q$(素数),由条件知道 HM 为 G 的子群.由于 $(|H|;|K|)=1$,可知 $H\cap K=1$,这样 $|G:HM|=|G|/(|H||M|)=|K|/|M|=q$. 由 Sylow 定理,$|G:N_G(P)$

* 1991年4月16日收到.山东省自然科学基金资助课题.

$|=|G:HM|\cdot|HM:N_G(P)|$. 故 $1+K_1P=t(1+K_2P)$，这里 $t=|G:HM|=q$，故 $1+K_1P=q\cdot qK_2P$，$P|q-1$，与 P 为 $|G|$ 的极大质因子矛盾，故 $P\trianglelefteq G$，令 $\bar{G}=G/P$ 易验证 $\bar{G}$ 满足定理条件. 从而 $\bar{G}$ 为超可解群，因而 G 为可解群.

设 G 的任一极大子群为 M，由于 G 为可解群，从而 $|G:M|=q^t$，这里 q 为质数. 我们设 $t>1$ 由于 $(|H|,|K|)=1$，可令 $q||K|$. 由于 G 为可解群，故 $\exists\ x\in G$，使 $H\leqslant M^x$，我们可设 $H\leqslant M$，故 $M=M\cap(KH)=(M\cap K)H$，$|M|=|H||M\cap K|$，$|G|/|M|=(|H||K|)/(|H||M\cap K|)=|K|/(|M\cap K|)=q^t$. 由于 $t>1$，又 K 为超可解子群，故 $M\cap K$ 不为 K 的极大子群，取 K 的含 $M\cap K$ 的极大子群 M_1，这样 $M\cap K<M_1<K$，由条件知道 HM_1 为 G 的真子群，且 $M=H(M\cap K)<HM_1\neq G$，与 M 极大矛盾，因而有 $t=1$，故 G 为超可解群.

定理 2 设 $G=HK$. $H\cap K=1$，$H\trianglelefteq G$，又 K 在 H 中拟正规，H，K 为超可解子群，则 G 为超可解群.

证明 因 H 为超可解子群，故 H 的极小正规子群 N 为 p 阶群，由条件知道 NK 为 G 的子群，$\forall\ x\in K$，因 $H\trianglelefteq G$，故 $N^x\leqslant H$，又 $N^x\leqslant NK$，故 $N^x\leqslant(NK)\cap H=N(K\cap H)=N$，所以 $N\trianglelefteq G$，令 $\bar{G}=\dfrac{HK}{N}$，易验证 $\bar{G}$ 满足定理条件，由对 $|G|$ 进行归纳知 $\bar{G}$ 为超可解群，从而 G 为超可解群.

定理 3 设 $G=HK$，$(|H|,|K|)=1$，H，K 为超可解子群，又 H 同 K 的 Sylow 子群及其它们的极大子群可交换，K 同 H 的 Sylow 子群及其它们的极大子群可交换，则 G 为超可解群.

证明 1° 首先证明 G 为可解群. 事实上，$\forall\ P||G|$，因为 $(|H|,|K|)=1$，$G=HK$，可设 $P||H|$. 由于 H 为可解，故 H 有 Sylow 基，设为 $H_{P_1},\cdots,H_{P_m}$，且令 $P_1=P$. 由条件知道 $H_{P_2},\cdots,H_{P_m}$ 为子群并为 G 的 $P'-$Hall 子群，从而我们得到 G 为可解群.

2° 令 M 为 G 的任一极大子群，故 $|G:M|=P^t$，我们可设 $P|H|$，而 $P||K|$. 由于 G 可解，因而存在 x，使 $H\leqslant M^x$，不失一般性，可设 $H\leqslant M$. 由 $G=HK$ 得 $G=MK$，$M=H(M\cap K)$，$|M|=|H||M\cap K|$，$|G|/|M|=|K|/(|M\cap K|)=P^t$，若 $t>1$，由于 K 为超可解群，因而 $M\cap K$ 不为 K 的极大子群，设 B 为 K 的含 $M\cap K$ 的极大子群，则 $|K:B|=P$. 令 B 的 Sylow 基为 B_{q_1}，$B_{q_2},\cdots,B_{q_t}$，其中 $q_1=P$，则 $B_{q_2},\cdots,B_{q_t}$ 为 K 的 Sylow 子群，B_{q_1} 为 K 的 $P-$Sylow 子群的极大子群. 由条件知道，H 同 $B_{q_1},B_{q_2}\cdots,B_{q_t}$ 可交换，因而 HB 为子群，又

$$H\cdot(M\cap K)<HB<HK=G,\quad M<HB<G,$$

同 M 为极大子群矛盾，从而 $t=1$，得到 G 为超可解群.

定理 1 和定理 3 均推广了[5]中的一个结果.

定理 4 设 H，K 为 G 的超可解子群，$G=HK$，G' 幂零，又 H 在 K 中拟正规，K 在 H 中拟正规，则 G 为超可解群.

证明 由于 G' 为幂零的，因而 G 为可解群. 若 G 有两个极小正规子群或 $\Phi(G)\neq 1$，均能推出 G 为超可解群. 若 G 不为超可解群，那么 G 只有一个极小正规子群且 $\Phi(G)=1$，由[6]中定理 7.1 我们知道 $G=AN$，这里 A 为 G 的极大子群且循环，N 为阶 P^a 的初等 Abel$-p$ 群，$a>1$，$N\trianglelefteq G$，且 $N\in \mathrm{syl}_pG$，$A\cap N=1$. 由已知条件可设 $N\leqslant H$，故有 $H=A_1N$，$A_1\leqslant A$. 由于 G 为可解群，A 为 G 的 $P'-$Hall 子群，设 K 的 $P'-$Hall 子群为 T，因而 $\exists\ x$，使 $T^x\leqslant A$，我们可设 $T\leqslant A$，因而 $\exists\ A_2\leqslant A$. 使 $K=A_2N_1$，这里 N_1' 为 K 的 $P-$Sylow 子群. 因为 $G=HK=A_1NA_2N_1=A_1A_2N$，故 $A=A_1A_2$，再由[6]中定理 7.1 $N_1\neq N$. 若 $N_1'=1$，由于 A 为超可解群，又 $a>1$，故 A_1 不为 H 的极大

子群，设 M 为 H 的含 A_1 的极大子群，则 $M=A_1S$，这里 S 为 M 的 P－sylow 子群，由条件 KM 为子群，又 $KM=A_2A_1S=AS$，所以 $A\lneqq AS\lneqq G$，同 A 为极大子群矛盾，这样 $N_1\neq 1$. 由条件 $A_1K=A_1A_2N_1$ 为子群，且 $A_1\lneqq A_1K\lneqq G$，矛盾.

由上证得 G 为超可解群.

本定理推广了[5]中的推论 3.7 及[1]中 Baer 的结论. [5]中推论 3.7 按本文的提示即按 3.4 的证明方法证之，其实证不出.

引理 设 G 为可解群. H,K 为 G 的具有 Sylow 塔性质的子群，且 $G=HK$，H 在 K 中拟正规，K 在 H 中拟正规，则 G 具有 Sylow 塔性质.

证明同[5]中推论 3.6.

定理 5 设 H,K 为 G 的超可解子群，$G=HK$，$H'\leq G$，$K'\leq G$，$[H,K]\leq G$，且$[H,K]$幂零，又 H 在 K 中拟正规，K 在 H 中拟正规，则 G 为超可解群.

证明 1° 若$[H,K]=1$ 显然 G 为超可解群.

2° 下设$[H,K]\neq 1$，当 G 有两个极小正规子群 N_1、N_2 时，则 $G\lesssim G/N_1\times G/N_2$，易验证 G/N_i 满足定理条件. 由对$|G|$的归纳，G/N_i 为超可解群，从而 G 为超可解群. 若 G 不为超可解群，G 只有唯一的极小正规子群，且 $\Phi(G)=1$. 因为$[H,K]\leq G$，$[H,K]\neq 1$ 且为幂零的. 这样$[H,K]$中能为 P－群. 由 $H'\trianglelefteq G$，$K'\trianglelefteq G$，H,K 为超可解群. 这样幂零群 $H'\cdot K'$ 也只能为 P－群. 由 $G/[H,K]$为超可解群，推出 G 为可解群. 由引理知道 G 具有 Sylow 塔性质. 由上可得出 P 为$|G|$的最大质因子. $\forall\ x_iy_i\in G$，这里 $x_i\in H$，$y_i\in K$，$i=1,2$，那么由[7]中 5.1.5(P119)得

$$[x_1y_1,x_2y_2]=[x_1,x_2y_2]^{y_1}\cdot[y_1,x_2y_2]=[x_1,y_2]^{y_1}[x_1,x_2]^{y_2y_1}\cdot[y_1,y_2][y_1,y_2]^{y_2},$$

$$[x_1,y_2]\in[H,K],$$

即

$$[x_1,y_2]^{y_1}\in[H,K]^{y_1}=[H,K],[x_1,x_2]\in H',$$

$$[x_1,x_2]^{y_2y_2}\in H',[y_1,y_2]\in K',[y_1,x_2]^{y_2}\in[H,K],$$

$$[x_1y_1,x_2y_2]\in H'K'[H,K]\leqslant G_p,$$

这里 $G_p\in\mathrm{Syl}_pG$，从而知 $G'\leqslant G_p$ 为幂零群.

由定理 5 得 G 为超可解群.

定理 5 推广了樊恽在[4]中的定理.

参 考 文 献

[1] R. Baer, *Classes of finite group and their properties*, Illinois J. Math, 1, 115—189 (1957).

[2] D. R. Friesen, *Products of normal supersolvable subgruops*, Proc. Amer. Math. Soc, 30, 46—48(1971).

[3] O. H. Kegel, *Zur struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen*, Math. 2. 87, 42—48 (1965)

[4] 张远达，有限群构造(下)，科学出版社(1982)，646.

[5] M. Asaad and A. Shaalan, *On the supersolvability of finite groups*, Sounderdruck aus Arch. Math., Vol. 53, 318—326(1989).

[6] 陈重穆，内外－Σ群与极小非Σ群，西南师范大学出版社(1988)，47.

[7] J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, springer—verlag, New York Heidelberg Berlin (1980).

Products of Two Supersolvable Subgroups of a Finite Group

Wang Pinchao

(Dept. of Math., Qufu Normal University, Shandong)

Abstract

In this paper, we give some sufficient conditions for products of two supersolvable subgroups to be supersolvable groups. Our results generalize some known results.

Theorem 1 *Let* $G = HK, (|H|, |K|) = 1$. *Where* H *and* K *are two supersolvable subgroups. If* H *is commutative with every maximal subgroup of* K, *and* K *is commutative with every maximal subgroup of* H, *then* G *is supersolvable.*

Theorem 2 *Let* $G = HK, H \cap K = 1, H \trianglerighteq G$, *and* K *be quasinormal in* H. *If* H, K *are supersolvable, the* G *is supersolvable.*

Theorem 3 *Let* $G = HK, (|H|, |K|) = 1, H, K$ *be two supersolvable subgroups. If* H *is commutative with any Sylow subgroup of* K *and any maximal subgroup of every sylow subgroup of* K, *and* K *is commutative with any sylow subgroup of* H *and any maximal subgroup of every sylow subgroup of* H, *then* G *is supersolvable.*

Theorem 4 *If* H, K *are two supersolvable subgroups of* $G, G = HK, G'$ *is nilpotent,* H *is quasi normal in* K, *and* K *is quasi normal in* H, *then* G *is supersolvable.*

Theorem 5 *If* H, K *are two supersolvable subgroups of* $G, G = HK, H' \lhd G, [H, K] \lhd G, [H, K]$ *is nilpotent,* H *is quasi normal in* K, *and* K *is quasi normal in* H, *then* G *is supersolvable.*