第13卷第2期 1993年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 2 May 1993

次弱 Γ_N—环对有限生成强诣零根的差环*

奚欧根 奚李峰
(宁波大学数学系，315020) (浙江大学数学系，杭州 310027)

摘 要

本文定义了次弱 Γ_N—环，证明了若次弱 Γ_N—环 M 的强诣零根 N 是有限生成的，则 M/N 一定是强诣零半单的. 并且，如果 M 存在强幂零根 I，则 $N=I$.

§1 引 言

设 M 是一个 Γ—环[1]，N 是它的强诣零根，因为强诣零环借助于强诣零环的扩张未必是强指零的，因此 M/N 未必是强诣零半单的. 那么增添什么条件可使 M/N 是强诣零半单的？本文回答了这个问题. 结果是，如果 N 是有限生成的，则此问题可望得到解决，然而证明过程中还需要定义合成 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$：$\alpha a\beta\in\Gamma,\forall\ \alpha,\beta\in\Gamma,\forall\ a\in M$，满足 $(a\alpha b)\beta c=a(\alpha b\beta)b=a\alpha(b\beta c)$，即把 Γ—环中的等式 $(a\alpha b)\beta c=a\alpha(b\beta c)$ 予以拓宽，于是，问题就完全得到解决，为此，本文将先定义次弱 Γ_N—环.

§2 次弱 Γ_N—环的强诣零根

Γ—环 M 叫做 Nobusawa Γ—环或 Γ_N—环，是指还定义合成 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$：$\alpha a\beta\in\Gamma$ ($\forall\ \alpha,\beta\in\Gamma,a\in M$)，且对 $\forall\ a,b,c\in M,\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$，满足

(1′) $(\alpha+\beta)a\gamma=\alpha a\gamma+\beta a\gamma$，$\alpha(a+b)\beta=\alpha a\beta+\alpha b\beta$，$a\alpha(\beta+\gamma)=a\alpha\beta+a\alpha\gamma$；

(2′) $(a\alpha b)\beta c=a(\alpha b\beta)c=a\alpha(b\beta c)$；

(2″) $(\alpha a\beta)b\gamma=\alpha(a\beta b)\gamma=\alpha a(\beta b\gamma)$；

(3) $a\Gamma b=0\Rightarrow a=0$

Γ—环 M 叫做弱 Γ_N—环，若在 Γ 中定义合成 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$，且满足(1′)，(2′)与(2″)[2].

Γ—环 M 叫做次弱 Γ_N—环是指在 Γ 中定义合成 $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$，且仅满足(2′)者.

因为次弱 Γ_N—环是 Γ—环，所以 Γ—环中的结果都可以移到次弱 Γ_N—环中. 而任一 Γ—环中都有一个强诣零根，因此任一次弱 Γ_N—环 M 中当然也有一个强诣零根 N，同样，M/N 未必是强诣零半单的.

* 1991年1月24日收到. 1992年11月17日收到修改稿.

§3 有限生成强诣零根

引理 3.1 设 M 是次弱 Γ_N—环，$a\in M$，记(a)为由 a 生成的 Γ—理想，则

$$(a\Gamma)^n a=\{0\}\Leftrightarrow((a)\Gamma)^n(a)=\{0\}.$$

证明 “$\Leftarrow$” 因为

$$(a)=\{na+x\gamma a+a\gamma' y+\sum_i x_i\gamma_i a\gamma_i' y_i \mid x,y,x_i,y_i\in M,\gamma,\gamma',\gamma_i,\gamma_i'\in\Gamma,n\in\mathbf{Z}\},$$

故 $a\in(a)$，充分性显然.

“$\Rightarrow$” 任取 $b\in((a)\Gamma)^n(a)$，则 $b=\sum_{j=1}^{s}b_j$，$b_j=y_{1j}\gamma_{1j}y_{2j}\gamma_{2j}\cdots y_{nj}\gamma_{nj}y_{(n+1)j}$，$y_{ij}\in(a)$，$\gamma_{ij}\in\Gamma$.
据次弱 Γ_N—环的条件$(2')$，

$$a\gamma y\alpha a\in a\Gamma a\quad(\gamma,\alpha\in\Gamma,\ y\in M);\qquad a\alpha b\beta c\gamma a\in a\Gamma a\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma,\ b,c\in M).$$

故 $b\in(a\Gamma)^n a+M\Gamma(a\Gamma)^n a+(a\Gamma)^n a\Gamma M+M\Gamma((a\Gamma)^n a)\Gamma M$，因为，$(a\Gamma)^n a=\{0\}$，故 $b=0$，即$((a)\Gamma)^n(a)=\{0\}$.

引理 3.2 设 M 是次弱 Γ_N—环，N 是 M 的强诣零理想，且 N 有限生成：$N=(a_1,a_2,\cdots,a_l)$ 则 N 也是 M 的强幂零理想.

证明 因为 N 的每个元是强幂零元，故对 $1\leqslant\forall\ i\leqslant l$，有正整数 s_i，使得$(a_i\Gamma)^{s_i}a_i=\{0\}$，由引理 3.1 知，$(a_i\Gamma)^{s_i}a_i=\{0\}\Leftrightarrow((a_i)\Gamma)^{s_i}(a_i)=\{0\}$，于是，因为 $N=(a_1,a_2,\cdots,a_l)=(a_1)+(a_2)+\cdots+(a_l)$，故

$$\begin{aligned}(N\Gamma)^{\sum_{i=1}^{l}s_i}N&=\{[(a_1)+(a_2)+\cdots+(a_l)]\Gamma\}^{\sum_{i=1}^{l}s_i}[(a_1)+(a_2)+\cdots+(a_l)]\\&\subseteq\sum_{i=1}^{l}((a_i)\Gamma)^{s_i}(a_i)=\{0\}.\end{aligned}$$

因此，N 是 M 的强幂零理想.

定理 3.3 令 M 是次弱 Γ_N—环，N 是 M 的有限生成强诣零根，$N=(a_1,a_2,\cdots,a_l)$，则 M/N 一定是强诣零半单的.

证明 若设 M/N 不是强诣零半单的，则可设 L/N 是 M/N 的非零强诣零理想，则存在 $b\in L$，而 $b\notin N$，但 $b+N$ 是强幂零元，故存在正整数 s，使得$[(b+N)\Gamma]^s(b+N)=\bar{0}$，由此得$(b\Gamma)^s\cdot b\subseteq N$.

由引理 3.2，N 也是强幂零的，因此存在某正整数 k，使得$(N\Gamma)^k N=\{0\}$，于是

$$\{[(b\Gamma)^s b]\Gamma\}^k[(b\Gamma)^s b]\subseteq(N\Gamma)^k N=\{0\},$$

故$(b\Gamma)^{(s+1)k+s}b=\{0\}$，

但由引理 3.1 知

$$(b\Gamma)^{(s+1)k+s}b=\{0\}\Leftrightarrow((b)\Gamma)^{(s+1)k+s}(b)=\{0\},$$

故知(b)是 M 的强幂零理想，因而也是强诣零理想，所以$(b)\subseteq N$，于是 $b\in N$，矛盾. 故 M/N 是强诣零半单的.

定理 3.4 设次弱 Γ_N—环 M 的强诣零根 N 是有限生成，则 N 也是 M 的强幂零根.

证明 这可由引理 3.2 立得.

参 考 文 献

[1] William E. Coppage and Jiang Luh, *Radicals of gamma rings*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 23, No. 1, 1971, 40—52.

[2] T. S. Ravisankar and U. S. Shukla, *Structure of Γ—rings*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 80, No. 2, 1979, 537—559.

[3] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

[4] 奚欧根，Γ—环与广义Γ—环的强幂零根与拟强幂零根，数学研究与评论，Vol. 8, No. 2, 1988, 171—174.

The Difference Ring of the Subweak Γ_N-Ring Relative to Finitely Generated Strong Nil Radical

Xi Ougen *Xi Lifeng*

(Ningbo University, Zhengjiang) (Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, the subweak Γ_N-ring is defined, and it is proved that suppoe the strong nil radical N is finitely generative, then M/N is certainly strong nil semi-simple. Finally, if M has strong nilpotent radical I, then the finitely generated strong nil radical N coincide with I.