第13卷第2期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 2
1993年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1993

# 半群环的恒等元存在性*

李 方
(兰州大学数学系,730001)

Ponizorskii[1]提出如下问题:

**问题** 半群环在什么条件下具有恒等元?

完全[0—]单半群环和逆半群环的恒等元存在性已有很好的刻画(见[1]). 本文讨论纯整半群环的恒等元存在性. 在讨论带环的恒等元时,本文使用了半群的 Schützenberger 表示,这种方法的使用在半群环的研究中尚属首次. 本文中 $R$ 一律表示有恒等元的环.

**定理 1** 令带 $B$ 是矩形带 $E_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格($Y$ 是半格),$RB$ 具有恒等元 $I_{RB}$. 那么,$M(Y)$($Y$ 中的极大元集)是有限集 $M(Y)=M(\mathrm{Ind}(\mathrm{Supp}\ I_{RB}))$;进一步,对任何 $\alpha\in M(Y)$, $|E_\alpha|=1$,且若令 $E_\alpha=\{e^{(\alpha)}\}$. 则

$$\{e^{(\alpha)}:\alpha\in M(Y)\}\cap \mathrm{Supp}(I_{RB}-\sum_{\alpha\in M(Y)}e^{(\alpha)})=\varnothing(\text{空集}).$$

**定理 2** 令 $N$—完备带 $B$ 是矩形带 $E_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格,则下列三款等价:

(i) $RB$ 具有恒等元;

(ii) $RY$ 具有恒等元且对任何 $\alpha\in M(Y)$, $|E_\alpha|=1$;

(iii) $|M(Y)|<+\infty$, $M(Y)Y=Y$ 且对任何 $\alpha\in M(Y)$, $|E_\alpha|=1$.

**定理 3** 令 $S$ 是纯整半群,幂等元集 $E(S)$ 是矩形带 $E_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格. 那么,当 $RS$ 具有恒等元时,$RY$ 具有恒等元,即 $|M(Y)|<+\infty$, $M(Y)Y=Y$.

**定理 4** 令 $S$ 是 $N$—完备纯整半群,$E(S)$ 是矩形带 $E_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格. 如果对任何 $\beta\in M(Y)$,有 $|E_\beta|=1$,那么下述三款等价:

(i) $RB$ 具有恒等元;

(ii) 半群环 $RE(S)$ 具有恒等元;

(iii) $|M(Y)|<+\infty$ 且 $M(Y)Y=Y$ 即 $RY$ 具有恒等元.

**定理 5** 令 $S$ 是广义 Brandt 半群. 那么,$RS$ 具有恒等元当且仅当 $S=M^{[0]}(G;n,n;\Delta_n)$ 是 Brandt 半群且 $n$ 是正整数.

## 参考文献

[1] Ponizovskiii, J. S., *Semigroup Rings*, Semigroup Forum, 36(1987), 1—46.

* 1991年6月26日收到.