第13卷第2期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 2
1993年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1993

半实轴上的非线性最佳逼近*

李 江 波
(浙江丽水师范专科学校数学系,323000)

摘 要

设 $h(x)$ 为严格下降于零的连续函数,并且 $h(0)=1$. 设 $f,g\in C[0,+\infty)$,定义距离为

$$d(f,g)=\sup_{x\geq 0}h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}.$$

本文在这个距离空间中引进了 D 中间性集和弱 D 中间性集的概念,并且考虑了在这两类集上的最佳逼近问题,建立了最佳逼近元的一些特征刻划.

§1 引 言

记 $C[0,+\infty)$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续实函数全体所成的距离空间,对于 $f,g\in C[0,+\infty)$,定义其距离为

$$d(f,g)=\sup_{x\geq 0}h(x)\frac{|f(x)-g(x)\}}{1+|f(x)-g(x)|},$$

其中 $h(x)$ 是严格下降于零的连续函数,并且 $h(0)=1$.

设 $G\subset C[0,+\infty)$,如果存在 $g^*\in G$ 使

$$d(f,g^*)=\inf_{g\in G}d(f,g), \tag{1}$$

则称 g^* 是 f 在 G 中的最佳逼近. 当 G 是线性集时,K'roo[1] 建立了最佳逼近的强唯一性;当 G 是具有某种约束的有理函数族时,邢阳[2]建立了存在定理,特征定理和强唯一性定理.

本文则引进了 D 中间性集和弱 D 中间性集的概念(它是 $C[0,\infty)$ 中凸集和有理函数集的推广),建立了在这两类集上的最佳逼近元的特征定理.

§2 定义和引理

定义 1 设 $G\subset C[0,+\infty)$,如果对任意的 $g^*,g\in G$,存在 λ一集 $\{g_\lambda\}\subset G(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,使 $g_0=g^*$,$g_1=g$ 且对任意固定的 $x\in[0,+\infty)$,$g_\lambda(x)$ 或为 λ 的严格单调函数或恒为常数,则称 G 具有 D 中间性.

定义 2 设 $G\subset C[0,+\infty)$,若对任意 $g^*,g\in G$,及满足 $\min_{x\in A}|\{g(x)-g^*(x)|>0$ 的任一有界

---

* 1991年3月27日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

闭集 $A\subset[0,+\infty)$，均有 $\{g_n\}\subset G$ 使 $d(g_n,g)\to 0$ 且 $\min\limits_{x\in A}(g(x)-g_n(x))(g_n(x)-g^*(x))>0$. 则称 G 具有弱 D 中间性.

注 1 D 中间性、弱 D 中间性可分别看作 $C[a,b]$ 空间中集的中间性[3]. 弱中间性[4]在 $C[0,+\infty)$ 空间中的推广.

引理 1 $d(g_n,g^*)\to 0\ (n\to\infty)$ 的充要条件是对任意实数 $a>0$，$\|g_n-g^*\|_{[0,a]}\to 0\ (n\to\infty)$，其中 $\|g_n-g^*\|_{[0,a]}=\max\limits_{x\in[0,a]}|g_n(x)-g^*(x)|$.

证明 首先注意到对任意实数 $a>0$

$$\|g_n-g^*\|_{[0,a]}\to 0\ (n\to\infty)\Leftrightarrow \sup_{0\leqslant x\leqslant a}h(x)\frac{|g_n(x)-g^*(x)|}{1+|g_n(x)-g^*(x)|}\to 0\quad(n\to\infty).\qquad(2)$$

现对任意 $\varepsilon>0$，由于 $h(x)\downarrow 0$，故存在实数 $a>0$，使 $\sup\limits_{x\geqslant a}h(x)<\frac{\varepsilon}{2}$，又 $\|g_n-g^*\|_{[0,a]}\to 0\ (n\to\infty)$. 故存在自然数 N. 当 $n>N$ 时，$\|g_n-g^*\|_{[0,a]}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}d(g_n,g^*)&\leqslant \sup_{x\in[0,a]}h(x)\frac{|g_n(x)-g^*(x)|}{1+|g_n(x)-g^*(x)|}+\sup_{x\geqslant a}h(x)\frac{|g_n(x)-g^*(x)|}{1+|g_n(x)-g^*(x)|}\\&\leqslant \sup_{x\in[0,a]}|g_n(x)-g^*(x)|+\sup_{x\geqslant a}h(x)<\varepsilon.\end{aligned}$$

必要性是显然的.

引理 2 对任意 $f,g\in C[0,+\infty)$，$f\neq g$，函数 $h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}$ 在 $[0,+\infty)$ 上可达到上确界且集合 $M_g=\{\xi\in[0,+\infty):h(\xi)\frac{|f(\xi)-g(\xi)|}{1+|f(\xi)-g(\xi)|}=\sup\limits_{x\geqslant 0}h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\}$ 是 $[0,+\infty)$ 中的有界闭集.

证明是容易的.

引理 3 设 $\{g_k\}\subset C[0,+\infty)$，$\{g_k\}$ 点点收敛到 g^* 且对任意 $x\in[0,+\infty)$，$\{g_k\}$ 是单调序列，则 $d(g_k,g^*)\to 0\ (k\to\infty)$.

证明 由条件知，序列 $|g_k(x)-g^*(x)|$ 是单调减少的连续函数列且点点收敛到 0，由 Dini 定理，对任意实数 $a>0$，$\|g_k-g^*\|_{[0,a]}\to 0\ (k\to\infty)$，再由引理 1 即知 $d(g_k,g^*)\to 0$.

注 2 由引理 2 易知，如果 $\{g_\lambda\}$ 是 g^*,g 的 λ—集，则 $d(g_{1/k},g^*)\to 0\ (k\to\infty)$.

定理 1 如果 G 是 D 中间性集，则 G 必是弱 D 中间性集.

证明 设 G 具有 D 中间性，则对任意 $g^*,g\in G$，存在 λ—集 $\{g_\lambda\}\subset G$，使 $g_0=g^*$，$g_1=g$，由注 2 知 $d(g_{1/k},g^*)\to 0$.

现设有界闭集 $A\subset[0,+\infty)$，使 $\min\limits_{x\in A}|g(x)-g^*(x)|>0$，则当 $x\in A$ 时 $g(x)\neq g^*(x)$，故此时，$\{g_{1/k}(x)\}$ 关于 k 严格单调，因此

$$(g(x)-g_{1/k}(x))(g_{1/k}(x)-g^*(x))>0.$$

由 A 的紧性及函数的连续性知

$$\min_{x\in A}(g(x)-g_{1/k}(x))(g_{1/k}(x)-g^*(x))>0.$$

从而 G 具有弱 D 中间性.

注 3 类似于通常的中间性集的证明[3]，易证如果 G 是 $C[0,+\infty)$ 中的凸集或有理函数集，则 G 具有 D 中间性，从而亦有弱 D 中间性.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

§3 特征定理

对任意的 $g\in C[0,+\infty)$，记 $E(g,x)=\dfrac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}$.

定理 2（特征定理 I） 设 $G\subset C[0,+\infty)$ 具有 D 中间性，$f\in C[0,+\infty)\backslash G$，则 $g^*\in G$ 是 f 在 G 中的最佳逼近当且仅当不存在 $g\in G$ 使

$$E(g,x)<E(g^*,x),\qquad x\in M_{g^*}.$$

其中 $M_{g^*}=\{\xi\in[0,+\infty):h(\xi)\dfrac{|f(\xi)-g^*(\xi)|}{1+|f(\xi)-g^*(\xi)|}=\sup\limits_{x\geqslant 0}h(x)\dfrac{f(x)-g^*(x)|}{1+|f(x)-g^*(x)|}\}$.

证明 充分性是显然的. 下证必要性.

假设存在 $g\in G$ 使

$$E(g,x)<E(g^*,x)=d(f,g^*),\qquad x\in M_{g^*}.$$

由于 $E(g,x)$ 连续（并于 x）且 M_{g^*} 紧，故存在一有界开集 $U\supset M_{g^*}$ 使

$$E(g,x)<d(f,g^*),\qquad x\in U.$$

由于 G 具有 D 中间性，故存在 λ一集 $\{g_\lambda\}\subset G$ 使 $g_0=g^*,g_1=g$ 且当 $\lambda\in U$ 时 $g^*(x)\neq g(x)$， 故 $g_\lambda(x)$ $(0<\lambda<1)$ 介于 $g^*(x),g(x)$ 所成的开区间内，故当 $x\in U$ 时

$$|f(x)-g_\lambda(x)|<\max\{f(x)-g(x)|,\ |f(x)-g^*(x)\},\quad 0<\lambda<1.$$

于是

$$E(g_\lambda,x)<\max\{E(g,x),E(g^*,x)\}\leqslant d(f,g^*),\ 0<\lambda<1,\ x\in U. \tag{3}$$

记 $V=[0,+\infty)\backslash U$，则 $V\neq\varnothing$，令 $\eta=d(f,g^*)-\sup\limits_{x\in V}h(x)E(g^*,x)\}$，由于 $V\cap M_{g^*}=\varnothing$，不难知 $\eta>0$. 现由 $d(g_{1/k},g^*)\to 0$ $(k\to\infty)$ 知必有 $0<\lambda_0<1$ 使 $d(g_{\lambda_0},g^*)<\eta$. 由于当 $x\in V$ 时

$$E(g_{\lambda_0},x)=\frac{|f(x)-g_{\lambda_0}(x)|}{1+|f(x)-g_{\lambda_0}(x)|}\leqslant\frac{|f(x)-g^*(9x)|}{1+|f(x)-g^*(x)|}+\frac{|g^*(x)-g_{\lambda_0}(x)|}{1+(g^*(x)-g_{\lambda_0}(x)|}.$$

从而当 $x\in V$

$$\begin{aligned}h(x)E(g_\lambda,x)&\leqslant h(x)\frac{|f(x)-g^*(x)|}{1+|f(x)-g^*(x)|}+h(x)\frac{|f(x)-g_{\lambda_0}(x)|}{1+|g^*(x)-g_{\lambda_0}(x)|}\\&\leqslant\sup_{x\in V}h(x)E(g^*,x)+d(g_{\lambda_0},g^*))\\&<d(f,g^*)-\eta+\eta=d(f,g^*).\end{aligned}\tag{4}$$

结合(3)，(4)知

$$h(x)E(g_{\lambda_0},x)<d(f,g^*),\qquad x\in[0,+\infty).$$

再由引理 2 即得

$$d(f,g_{\lambda_0})=\sup_{x\geqslant 0}h(x)E(g_{\lambda_0},x)<d(f,g^*).$$

即 g^* 不是最佳逼近.

定理 3（充分条件） 设 $G\subset C[0,+\infty)$，$f\in C[0,+\infty)\backslash G$，$g^*\in G$，如果对任意 $g\in G$ 成立

$$\max_{x\in M_{g^*}}[f(x)-g^*(x)][g^*(x)-g(x)]\geqslant 0, \tag{5}$$

则 g^* 是 f 在 G 中的最佳逼近.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 设对任意 $g\in G$ 成立(5)式,即有 $x\in M_{g^*}$ 使

$$(f(x)-g^*(x))(g^*(x)-g(x))\geqslant 0,$$

则必有

$$f(x)\geqslant g^*(x)\geqslant g(x) \text{ 或 } f(x)\leqslant g^*(x)\leqslant g(x).$$

从而 $|f(x)-g^*(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|$. 因此

$$d(f,g^*)=h(x)\frac{|f(x)-g^*(x)|}{1+|f(x)-g^*(x)|}\leqslant h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}=d(f,g).$$

故 g^* 是 f 在 G 中的最佳逼近.

定理 4 (必要条件) 设 $G\subset C[0,\infty)$ 具有弱 D 中间性,$f\in C[0,+\infty)\backslash G$,如果 $g^*\in G$ 是 f 在 G 中的最佳逼近,则对任意 $g\in G$,(5)式成立.

证明 假设(5)不成立,则存在 $g\in G$ 使

$$\max_{x\in M_{g^*}}(f(x)-g^*(x))(g^*(x)-g(x))<0.$$

由 M_{g^*} 紧及函数的连续性,必存在一有界开集 $U\supset M_{g^*}$ 使

$$\max_{x\in \bar U}(f(x)-g^*(x))(g^*(x)-g(x))<0$$

且

$$\min_{x\in \bar U}|g(x)-g^*(x)|\geqslant\min_{x\in \bar U}(g(x)-g^*(x))\mathrm{sgn}(f(x)-g^*(x))>0$$

由于 G 具有弱 D 中间性,故存在 $\{g_n\}\subset G$,使 $d(g_n,g^*)\to 0$ 且 $\min\limits_{x\in \bar U}(g(x)-g_n(x))(g_n(x)-g^*(x))>0$. 由引理 1 得 $\|g_n-g^*\|_{\bar U}\to 0$,故存在自然数 N_1,使当 $n>N_1$ 时

$$\|g_n-g^*\|_{\bar U}<\max_{x\in \bar U}|g(x)-g^*(x)|.$$

于是当 $n>N_1, x\in\bar U$ 时

$$\mathrm{sgn}(f(x)-g^*(x))=\mathrm{sgn}(f(x)-g_n(x))=\mathrm{sgn}(g_n(x)-g^*(x)).$$

从而

$$\sup_{x\in \bar U}h(x)E(g_n,x)<d(f,g^*),\quad n>N_1.$$

令 $V=[0,+\infty)\backslash U$,则 $V\neq\varnothing$ 且 $V\cap M_{g^*}=\varnothing$,由引理 2 知必有数 $\eta>0$ 使

$$\sup_{x\in V}h(x)\frac{|f(x)-g^*(x)|}{1+|f(x)-g^*(x)|}\leqslant d(f,g^*)-\eta.$$

又因为 $d(g_n,g^*)\to 0$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in V}h(x)E(g_n,x)=\sup_{x\in V}h(x)E(g^*,x).$$

从而存在自然数 N_2,当 $n>N_2$ 时

$$\sup_{x\in V}h(x)E(g_n,x)<\sup_{x\in V}h(x)E(g^*,x)+\eta.$$

因此当 $n>N_2$ 时

$$\sup_{x\in V}h(x)E(g_n,x)<d(f,g^*).$$

最后当 $n>N=\max(N_1,N_2)$ 时

$$\sup_{x\geqslant 0}h(x)E(g_n,x)<d(f,g^*).$$

故 g^* 不是最佳逼近.

由定理 3,4 可得如下特征定理.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理 5（特征定理 Ⅱ） 设 $G\subset C[0,+\infty)$ 且具有弱 D 中间性，$f\in C[0,+\infty)\backslash G$，则 $g^*\in G$ 是 f 在 G 中的最佳逼近当且仅当对任意 $g\in G$ 成立.

$$\max_{x\in M_{g^*}}(f(x)-g^*(x))(g^*(x)-g(x))\geqslant 0.$$

推论 1 设 R_m^n 是 $C[0,+\infty)$ 上的有理函数类，即

$$R_m^n=\{\frac{p}{q}:p\in\pi_n,q\in\pi_m,(p,q)=1,q(x)>0,x\in[0,+\infty)\},$$

其中 π_k 是 $[0,+\infty)$ 上的 k 次多项式全体，则 $r^*=\frac{p^*}{q^*}\in R_m^n$ 是 f 在 R_m^n 中的最佳有理逼近当且仅当对每个 $p\in\pi_n,q\in\pi_m$ 成立

$$\max_{x\in M_{r^*}}(f(x)-r^*(x))(p(x)+r^*(x)q(x))\geqslant 0. \tag{6}$$

证明 我们首先证明 R_m^n 具有 D 中间性从而更具有弱 D 中间性. 事实上，对任意的 $r=\frac{p}{q}$，$r^*=\frac{p^*}{q^*}\in R_m^n$，令 $r_\lambda=\frac{(1-\lambda)p^*+\lambda p}{(1-\lambda)q^*+\lambda q}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $r_0=r^*,r_1=r$ 且由于对任意 $x\in[0,+\infty)$

$$\frac{d}{dr}r_\lambda(x)=\frac{(1-\lambda)q^*(x)q(x)(r(x)-r^*(x)}{[(1-\lambda)q^*(x)+\lambda q(x)]^2}\geqslant 0,$$

故 $\{r_\lambda(x)\}$ 是 λ 的严格单调函数（当 $r(x)\neq r^*(x)$ 时）或恒为常数（$r(x)=r^*(x)$ 时），由定义 1 知 R_m^n 具有 D 中间性.

现在我们证明推论.

由定理 5 我们只要证明(6)等价于(5). (6)⇒(5)是显然的.

反设(5)成立，但(6)不成立，则存在 $p\in\pi_n,q\in\pi_m$，使

$$\max_{x\in M_{r^*}}(f(x)-r^*(x))(p(x)+r^*(x)q(x))<0.$$

令 $r_\lambda=\frac{(1-\lambda)p^*-\lambda p}{(1-\lambda)q^*+\lambda q}$，则 $r_\lambda\in R_m^n$ 而

$$r^*(x)-r_\lambda(x)=\frac{\lambda(p^*(x)q(x)+p(x)q^*(x))}{q^*((1-\lambda)q^*(x)+q(x))}=\lambda\frac{p(x)+r^*(\lambda)q(x)}{(1-\lambda)q^*(x)+\lambda q(x)}.$$

从而

$$\max_{x\in M_{r^*}}(f(x)-r^*(x))(r^*(x)-r_\lambda(x))<0$$

与(5)式矛盾. 从而推论成立.

推论 2 设 G 是 $C[0,+\infty)$ 中的有限维线性子空间，$f\in C[0,+\infty)\backslash G$，则 $g^*\in G$ 是 f 在 G 中的最佳逼近当且仅当对任意 $g\in G$ 成立

$$\max_{x\in M_{g^*}}(f(x)-g^*(x))g(x)\geqslant 0.$$

参 考 文 献

[1] K'roo, Andras, Numer. Funct. Anal. and Optimiz, 1981—1982; 4; 437—443.

[2] 邢阳，杭州大学学报(自)，2(1987)，141—148.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[3] C. B. Dunham, T. A. M. S., 1(1968), 151—157.
[4] R. Smarzcwski, J. A. T. 1(1979), 56—64.

Approximation by Nonlinear Families on $[0,+\infty)$

Li Jiangbo
(Lishui Teachers College, Zhejiang)

Abstract

Let $C[0,+\infty)$ be the space of continuous functions on $[0,+\infty)$. For $f,g\in C[0,+\infty)$, their distance is defined by

$$d(f,g)=\sup_{x\geq 0}h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|},$$

where $h(x)$ is a strictly decreasing continuous function and $h(0,1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.

Here, we consider approximation by the families with the D betweeness property or the weak D betweeness propert. The characterzations of best approximation are studied.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.