第13卷第2期
1993年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 13 No. 2
May 1993

非光滑最优化问题的充分条件*

杨新民
(重庆师范学院数学系, 630047)

§1 引 言

考虑如下最优化问题：

$$(\mathrm{NP})\quad \begin{cases}\min f(x)\\ x\in R=\{x\in E^n/g(x)\leqslant 0, h(x)=0\},\end{cases}$$

其中 $f: E^n\to E, g=(g_1,\cdots,g_m)^T: E^n\to E^m, h=(h_1,\cdots,h_p)^T: E^n\to E^p$ 并且 $f, g_i(1\leqslant i\leqslant m)$, $h_j(1\leqslant j\leqslant p)$ 均是 E^n 上的局部 Lipschitz 函数.

最近，唐焕文等在[1]中提出了广义伪凸函数并在[2]中利用这类函数讨论了非光滑最优化问题解的充分条件. 在这篇文章里，我们提出几类广义凸性函数，在这些凸性条件下我们证明了非光滑最优化问题(NP)的解的充分条件，它包括 Kuhn－Tucker 充分条件和 FritzJohn 充分条件.

§2 概 念

设 Ω 是 E^n 的一个开子集，一个实值函数 $h: \Omega\to E$ 称为是局部 Lipschitz 的，若存在一个正常数 k，使得

$$|h(x)-h(y)|\leqslant k\|x-y\|\qquad(\forall\ x,y\in\Omega).$$

对于局部 Lipschitz 函数，Clarke 曾经给出如下广义方向导数和广义梯度概念

$$h^\circ(x;d)=\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}[f(y+td)-f(y)]/t,$$

$$\partial f(x)=\{g\in E^n/\langle g,d\rangle\leqslant h^\circ(x;d),\forall\ d\in E^n\}.$$

定义 1 称泛函 H 在空间 S 上是次线性的，如果满足

(i) $H(x+y)\leqslant H(x)+H(y),\ \forall\ x,y\in S$;

(ii) $H(\alpha x)=\alpha H(x), \forall\ x\in S, \alpha\geqslant 0$.

显然 $H(0)=0$.

又设 $\theta: \Omega\times\Omega\to E^n$ 满足 $\forall\ x,u\in\Omega$，当 $x\neq u$ 时 $\theta(x,u)\neq 0$. 对于满足上述条件的 θ 和次线性泛函 H，我们定义如下几种广义凸性.

定义 2 局部 Lipschitz 函数 $h: \Omega\to E$ 称为在 $u\in\Omega$ 处关于 H 和 θ 是广义(ρ－严格伪凸)ρ－伪凸，如果存在实数 ρ，使得对任何 $x\in\Omega(x\neq u)$，当 $H_{x,u}(\xi)\geqslant -\rho\|\theta(x,u)\|^2, \forall\ \xi\in\partial h(u)$，有

* 1991年4月28日收到.

$$h(x) \geqslant h(u) \quad (h(x) > h(u)).$$

定义 3 局部 Lipschitz 函数 $h: \Omega \to E$ 称为在 $u \in \Omega$ 处关于 H 和 θ 是广义 ρ－拟凸，如果存在实数 ρ，使得对任何 $x \in \Omega$，当 $h(x) \leqslant h(u)$，有

$$H_{x,u}(\xi) \leqslant -\rho \| \theta(x,u) \|^2, \forall \xi \in \partial h(u).$$

定义 4 局部 Lipschitz 函数 $h: \Omega \to E$ 称为在 $u \in \Omega$ 处关于 H 和 θ 是广义 ρ－弱拟凸，如果存在实数 ρ，使得对任何 $x \in \Omega, x \neq u$，当 $h(x) < h(u)$，有

$$H_{x,u}(\xi) \leqslant -\rho \| \theta(x,u) \|^2, \forall \xi \in \partial h(u).$$

注 显然，上述广义凸性概念大大推广了 [1－2][4－7] 中提出的凸性，其范围更广泛.

§3 充分性条件

定理 1 设 $\bar{x} \in R$，若存在 $\bar{\lambda} > 0, \bar{u} \geqslant 0$ 和 $\bar{v} \geqslant 0$，使得

$$0 \in \bar{\lambda}\partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \partial h_j(\bar{x}), \tag{1}$$

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0. \tag{2}$$

又设 $f, g_i(1 \leqslant i \leqslant m), h_j(1 \leqslant j \leqslant p)$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0－伪凸，广义 ρ_i－拟凸 $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 和广义 $\bar{\rho}_j$－拟凸 $(1 \leqslant j \leqslant p)$；再设 $(\bar{\lambda}\rho_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \rho_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \bar{\rho}_j) \geqslant 0$，则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

证明 用反证法，若 $\bar{x}$ 不是 (NP)的最优解，则存在 $x^\circ \in R$，有

$$f(x^\circ) < f(\bar{x}), \tag{3}$$

$$g(x^\circ) \leqslant 0, \tag{4}$$

$$h(x^\circ) = 0. \tag{5}$$

令 $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$，有

$$g_i(x^\circ) \leqslant 0 = g_i(\bar{x}),\ i \in I, \tag{6}$$

$$h_j(x^\circ) = 0 = h_j(\bar{x}),\ 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{7}$$

由 $f, g_i(1 \leqslant i \leqslant m), h_j(1 \leqslant j \leqslant p)$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0－伪凸，广义 ρ_i－拟凸 $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 和广义 $\bar{\rho}_j$－拟凸 $(1 \leqslant j \leqslant p)$ 以及(3)，(6) 和(7)，有

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\xi_0) < -\rho_0 \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2, \forall \xi_0 \in \partial f(\bar{x}); \tag{8}$$

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\xi_i) \leqslant -\rho_i \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2, \forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}), i \in I; \tag{9}$$

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\bar{\xi}_j) \leqslant -\bar{\rho}_j \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2, \forall \xi_j \in \partial h_j(\bar{x}), 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{10}$$

因 $\bar{\lambda} > 0, \bar{u} \geqslant 0$ 和 $\bar{v} \geqslant 0$，用 $\bar{\lambda}, \bar{u}_i(i \in I)$ 和 $\bar{v}_j(1 \leqslant j \leqslant p)$ 分别乘(8)、(9) 和(10)，然后相加并注意 H 的次线性性，有

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\bar{\lambda}\xi_0 + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \xi_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \bar{\xi}_j) < -(\bar{\lambda}\rho_0 + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \rho_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \bar{\rho}_j) \| \theta(\bar{x}) \|^2,$$
$$\forall \xi_0 \in \partial f(\bar{x}), \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}),\ i \in I, \bar{\xi}_j \in \partial h_j(\bar{x}) (1 \leqslant j \leqslant m). \tag{11}$$

又因 $g(\bar{x}) \leqslant 0$ 和 $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$ 知 $\bar{u}_i = 0, i \overline{\in} I$. 因此，由 $(\bar{\lambda}\rho_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \rho_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \bar{\rho}_j) \geqslant 0$ 和(11)，有

$$H_{x^*,\bar{x}}(\bar{\lambda}\xi_0+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i\xi_i+\sum_{j=1}^{p}\bar{v}_j\bar{\xi}_j)<0,$$

$\forall\ \xi_0\in\partial f(\bar{x}),\xi_i\in\partial g_i(\bar{x})\ (1\leqslant i\leqslant m),\bar{\xi}_j\in\partial h_j(\bar{x})\ (1\leqslant j\leqslant p)$. 上式显然与(1)相矛盾. 这表明对任意 $x\in R,f(x)\geqslant f(\bar{x})$,即 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

用类似方法可证下面的定理 2 — 5.

定理 2 设 $\bar{x}\in R$,若存在 $\bar{\lambda}>0,\bar{u}\geqslant 0$ 和 $\bar{v}\in E^p$,使得

$$0\in\bar{\lambda}\partial f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i\partial g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{p}\bar{v}_j\partial h_j(\bar{x}),$$

$$\bar{u}^Tg(\bar{x})=0,$$

又设 $f,g_i(1\leqslant i\leqslant m)$, $\bar{v}_jh_j(1\leqslant j\leqslant p)$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 伪凸,广义 ρ_i — 拟凸$(1\leqslant i\leqslant m)$ 和广义 $\bar{\rho}_j$ — 拟凸$(1\leqslant j\leqslant p)$ 且$(\bar{\lambda}\rho_0+\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i\rho_i+\sum_{j=1}^{p}\bar{\rho}_j)\geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

注 定理 2 推广了[2]中定理 3.2.

定理 3 设 $\bar{x}\in R$,若存在 $\bar{\lambda}>0,\bar{u}\geqslant 0$ 和 $\bar{v}\in E^p$ 使得

$$0\in\bar{\lambda}\partial f(\bar{x})+\partial(\bar{u}^Tg(\bar{x}))+\partial(\bar{v}^Th(\bar{x})),\quad \bar{u}^Tg(\bar{x})=0,$$

又设 $f,\bar{u}^Tg,\bar{v}^Th$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 伪凸,广义 ρ_1 — 拟凸和广义 ρ_2 — 拟凸,再设$(\bar{\lambda}\rho_0+\rho_1+\rho_2)\geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

定理 4 设 $\bar{x}\in R$,若存在 $\bar{\lambda}>0,\bar{u}\geqslant 0$ 和 $\bar{v}\in E^p$,使得

$$0\in\bar{\lambda}\partial f(\bar{x})+\partial(\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th)(\bar{x}),\bar{u}^Tg(\bar{x})=0,$$

又设 $f,\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 伪凸和广义 ρ_1 — 拟凸且$(\bar{\lambda}\rho_0+\rho_1)\geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

定理 5 设 $\bar{x}\in R$,若存在 $\bar{\lambda}>0,\bar{u}\geqslant 0$ 和 $\bar{v}\in E^p$,使得

$$0\in\partial(\bar{\lambda}f+\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th)(\bar{x}),$$

又设 $\bar{\lambda}f+\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th$ 关于次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处是广义 ρ — 伪凸函数且 $\rho\geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

上面,我们讨论了非光滑最优化问题(NP)的 Kuhn — Tucker 充分条件,下面讨论 Fritz John 充分条件.

定理 6 设 $\bar{x}\in R$,若存在 $\bar{\lambda}\geqslant 0,\bar{u}\geqslant 0$ 和 $\bar{v}\in E^p,(\bar{u},\bar{v})\neq 0$,使得

$$0\in\bar{\lambda}\partial f(\bar{x})+\partial(\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th)(\bar{x}),\tag{12}$$

$$\bar{u}^Tg(\bar{x})=0,\tag{13}$$

又设 $f,\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 弱拟凸,广义 ρ_1 — 严格伪凸且$(\bar{\lambda}\rho_0+\rho_1)\geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

证明 反设 $\bar{x}$ 不是(NP)的最优解,则存在 $x^\circ\in R$,使得

$$f(x^\circ)<f(\bar{x}),\tag{14}$$

$$g(x^\circ)\leqslant 0,\tag{15}$$

$$h(x^\circ)=0.\tag{16}$$

因 $\bar{u}\geqslant 0$ 和(13)以及(15)、(16)得

$$\bar{u}^Tg(x^\circ)+\bar{v}^Th(x^\circ)\leqslant\bar{u}^Tg(\bar{x})+\bar{v}^Th(\bar{x}).\tag{17}$$

由 $f,\bar{u}^Tg+\bar{v}^Th((\bar{u},\bar{v})\neq 0)$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 弱

拟凸、广义 ρ_1 — 严格伪凸和(14)、(17)得

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\xi_0) \leqslant -\rho_0 \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2, \forall \xi_0 \in \partial f(\bar{x}),$$
$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\xi_1) < -\rho_1 \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2, \forall \xi_1 \in \partial(\bar{u}^T g + \bar{v}^T h)(\bar{x}).$$

因 $\bar{\lambda} \geqslant 0$,于是由上两式,有

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\bar{\lambda}\xi_0 + \xi_1) < -(\bar{\lambda}\rho_0 + \rho_1) \| \theta(x^\circ,\bar{x}) \|^2,$$
$$\forall \xi_0 \in \partial f(\bar{x}), \quad \forall \xi_1 \in \partial(\bar{u}^T g + \bar{v}^T h)(\bar{x}).$$

又 $(\bar{\lambda}\rho_0 + \rho_1) \geqslant 0$,所以由上式得

$$H_{x^\circ,\bar{x}}(\bar{\lambda}\xi_0 + \xi_1) < 0, \forall \xi_0 \in \partial f(\bar{x}), \forall \xi_1 \in \partial(\bar{u}^T g + \bar{v}^T h)(\bar{x}),$$

这与(12)相矛盾. 因此对任意 $x \in R$, $f(x) \geqslant f(\bar{x})$,即 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

用类似于定理 6 的方法可证下面的定理 7.

定理 7 设 $\bar{x} \in R$,若存在 $\bar{\lambda} \geqslant 0, \bar{u} \geqslant 0$ 和 $\bar{v} \in E^p$,使得

$$0 \in \bar{\lambda}\partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{v}_j \partial h_j(\bar{x}), \tag{18}$$
$$\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0,$$

又设 $f, g_s(\bar{u}_s > 0), g_i(1 \leqslant i \leqslant m, i \neq s)$ 和 $\bar{v}_j h_j(1 \leqslant j \leqslant p)$ 关于相同的次线性泛函 H 和向量函数 θ 在 $\bar{x}$ 处分别是广义 ρ_0 — 弱拟凸、广义 ρ_s — 严格伪凸、广义 ρ_i — 拟凸$(1 \leqslant i \leqslant, i \neq s)$ 和广义 $\bar{\rho}_j$ — 拟凸$(1 \leqslant j \leqslant p)$ 且 $(\bar{\lambda}\rho_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \rho_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{\rho}_j) \geqslant 0$,则 $\bar{x}$ 是(NP)的最优解.

注 定理 7 推广了[7]中定理 3.1.

利用本文提出的广义凸性函数,还可进一步讨论最优化问题的对偶理论[7].

参 考 文 献

[1] 唐焕文等,广义伪凸函数与非光滑优化不动点算法的收敛性,数学学报,4(1990),521—527.

[2] 胡新生、唐焕文,一类不可微规划的充分条件,系统科学与数学,2(1990),175—180.

[3] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley, New York, 1984.

[4] V. Jeyakumar, *Equivalence of saddle—points and optima, and duality for a class of non—smooth non—convex problems*, J. Math. Anal. Appl. 130(2)(1988), 334—343.

[5] J. P. Vial, *Strong and weak convexity of sets and functions*, Math. Oper. Res., 3(1983), 231—259.

[6] M. A. Hanson and B. Mond, *Further generalizations of convexity in mathematical programming*, J. Inform. Optim. Sci., 3(1982), 25—32.

[7] C. R. Bector ed, *Sufficient optimality conditions and duality for a quasiconvex programming problem*, 59(2)(1988), 209—222.

Sufficient Conditions for Nonsmooth Optimization Problems

Yang Xinmin

(Chongqing Teachers College, Chongqing)

Abstract

In this paper, we present some concepts of generalized convexity. Under these generalized convexity assumptions, we prove some sufficient conditions for nonsmooth optimization, which include Kuhn-Tucker sufficient optimality conditions and Fritz John sufficient optimality conditions.