第13卷第2期 1993年5月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 13 No. 2 May 1993

二重递归函数及其分层*

郑锡忠
(南京大学数学系,210008)

摘要

本文讨论 R. Péter[3]所提出的二重递归函数的性质,给出了二重递归函数的另一种等价刻画.即证明了二重递归函数类就是文[6]中所讨论的 $\mathscr{Z}$—分层函数类 $\mathscr{Z}=\bigcup_{i\in\omega}\mathscr{Z}_i$.结合文[6]的结论我们便得到了关于二重递归函数类的一种 Grzegorczyk 型分层和一种更简单的二重递归模式.

多重递归函数概念首先是由 R. Péter[3]提出并加以讨论的.这一类函数是作为对原始递归函数的扩充而引进的,而且它们被认为是所有对原始递归函数类的扩张中保持原始递归函数之"易计算性"最多的一类函数.或者可以说是其计算复杂性仅次于原始递归函数的一类可计算函数.关于原始递归函数类,人们已经进行了大量深入的研究,并已获得了相当丰富的结论(详见[2][5]).特别地,对原始递归定义模式已有了各种的化归.例如,莫绍揆在[2]中,把下列一般的原始递归模式

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f(x_1,\cdots,x_n,0)=g(x_1,\cdots,x_n)\\ f(x_1,\cdots,x_n,y+1)=h(x_1,\cdots,x_n,y,f(x_1,\cdots,x_n,y))\end{cases}$$

化归到了下列形式(称为标准原始递归式)

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} f(u,0)=u\\ f(u,x+1)=h(x,f(u,x)).\end{cases}$$

甚至更进一步化归到了下列原始复迭式.

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} f(u,0)=u\\ f(u,x+1)=h(f(u,x)).\end{cases}$$

如果用算子的形式表示,(Ⅱ)式和(Ⅲ)式所定义的函数可分别记为 $f(x,y)=\underset{(e_1,e_2)\to x,y}{\mathrm{rec}}h(e_1,e_2)$ 和 $f(x,y)=\underset{e\to x,y}{\mathrm{itr}}h(e)$.如果类似地把(Ⅰ)式定义的函数也用算子表示.则有 $f(x_1,\cdots x_n,y)=\underset{(e_1,e_2)\to y}{R}(g(x_1,\cdots x_n),h(x_1,\cdots x_n,e_1,e_2))$.这要比"rec"和"itr"算子复杂得多.另一方面,由于任何的单重递归都可以化归到上述的原始递归模式(见[2]).因此可以说,关于单重递归模式的化归问题已经是相当清楚了.本文将要讨论的是二重递归模式的化归问题.

众所周知,单重递归模式定义函数 f 的特点是:在确定 $f(x)$ 之值时,对任何 $x_1<x$,$f(x_1)$ 的值都是可以使用的.也就是说,$f(x_1)$ 已在 $f(x)$ 之前确定了.这样一来,$f(x)$ 值的先后次序就被

* 1991年3月31日收到.国家自然科学基金资助项目.

其单个(递归)变元的大小所确定了. 作为单重递归的推广,用二重递归模式定义函数时,其值的先后次序则是由两个(递归)变元按字典排列次序所确定的. 比如,$f(x_1,y_1)$在$f(x,y)$之前是指$x_1<x \vee (x_1=x \,\&\, y_1<y)$. 因此,二重递归定义模式具有下列的一般形式(以单参数为例)

$$
(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} f(u,0,0)=g_1(u) \\ f(u,0,y+1)=g_2(u,y,f(u_1,0,\tilde{y}_1)) \\ f(u,x+1,0)=g_3(u,x,f(u_2,\tilde{x}_1,y_2)) \\ f(u,x+1,y+1)=g_4(u,x,y,f(u_3,\tilde{x}_2,y_3),f(u_4,x+1,\tilde{y}_4)) \end{cases}
$$

其中,$u_i,\tilde{x}_i,\tilde{y}_i$和$y_i$都是一些(适当变元的)函数,且满足条件$\tilde{x}_i\leqslant x \,\&\, \tilde{y}_i\leqslant y$. 对$u_i,y_i$的取值则没有任何限制. 如果在诸$u_i,\tilde{x}_i,\tilde{y}_i$和$y_i$中都不含有未知函数$f$,则(Ⅳ)称为简单二重递归. 否则便称为嵌套的二重递归. 简单的二重递归都可以化归到原始递归(见[2]),而嵌套的则不然. 最典型的例子是由下列嵌套的二重递归式所定义的 Ackermann 函数便是非原始递归的

$$
\begin{cases} f(0,y) = y + 1 \\ f(x + 1,0) = f(x,1) \\ f(x + 1,y + 1) = f(x,f(x + 1,y)). \end{cases}
$$

因此,用二重递归可以得到比原始递归函数类更大的函数类. 即二重递归函数类.

定义 1 二重递归函数类MR_2是指由本原函数出发经复合和二重递归式(Ⅳ)所得的函数类. 这里本原函数包括后继函数、零函数和投影函数.

对二重递归的定义模式,R. Péter 作了重要的化归,她证明了如下结论

命题(R. Péter[3]) 二重递归函数类可由本原函数出发,经复合和下列标准二重递归式而得

$$
(\mathrm{V})\quad \begin{cases} f(x,y)=0 \qquad \text{如果 } x\cdot y=0 & (1) \\ f(x+1,y+1)=g(x,y,f(x+1,y),h(x,y,f(x+1,y)), & (2) \end{cases}
$$

其中,g,h为已知函数.

采用算子的记号,可把(Ⅴ)所定义的f记为

$$
f(x,y) = \underset{(e_1,e_2,e_3,e_4)\to x,y}{R^2} (g(e_1,e_2,e_3,e_4),h(e_1,e_2,e_3)).
$$

注意到(Ⅴ)式中只用到了关于f的两层嵌套,而(Ⅳ)中对嵌套的层数则没有限制,因此(Ⅴ)要比(Ⅳ)简单的多. 下面,我们要把(Ⅴ)作进一步的化归,最后用 Ackermann 函数的定义模式来替代(Ⅴ). 即把(Ⅴ)化归到下列模式

$$
(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} f(0,y)=g(y) \\ f(x+1,0)=f(x,1) \\ f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y)), \end{cases}
$$

其中g为已知函数. (Ⅵ)中所定义的函数f可以用算子$\underset{e\to x,y}{\mathrm{itr}^2}\, g(e)=f(x,y)$表示. 注意到算子"$\mathrm{itr}^2$"只含一个约束变元$e$和两个新添变元$x,y$,并且其作用域中只有一个一元函数. 因此,它要比 R. Péter 的相应算子"R^2"简单得多. 而且(Ⅵ)所定义的函数f仅在其初值上与已知函数g有关,它可看成是一种"复迭"型算子. 但是,由于从本原函数出发,经复合和(Ⅵ)得不到全体二重递归函数,因此,在把(Ⅴ)化归到(Ⅵ)时要借助于原始递归运算,这样,我们的化归结果(即下面的定理 8)便是,一般的二重递归函数可以由本原函数及复合、原始递归和算子"itr^2"得到. 甚至在新增加一个特殊的函数列之后,连"itr^2"也可以去掉(推论 9). 由于原始递归要比二重递

归简单得多.因此，这仍然是对二重递归的一种极大的简化.

为了证明我们的化归结论，将用到作者在[6]中所定义的一种 Grzegorczyk 型分层，即所谓的 Z－分层.并证明 Z－分层所涉及的函数类恰好就是 MR_2，从而可知 Z－分层是原始的 Grzegorczyk 分层对二重递归函数类上的一种自然推广.下面先定义 Z－分层.以后所见的一些记号可参见[2].

定义 2 (1) 函数列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 定义如下

$$(\text{VII})\quad\begin{cases} A_0(x,y)=y+2; & (3)\\ A_{n+1}(0,y)=A_n(y,y), & (4)\\ A_{n+1}(x+1,0)=A_{n+1}(x,1), & (5)\\ A_{n+1}(x+1,y+1)=A_{n+1}(x,A_{n+1}(x+1,y))N^2(n+(x\dot{-}1)) & \\ \qquad\qquad +A_{n+1}(x+1,y)+A_{n+1}(x,y))N(n+(x\dot{-}1)). & (6)\end{cases}$$

(2) Z－分层 $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ 中第 n 层 Z_n 是指由本原函数及 A_n 出发，经复合和原始递始运算所生成的函数类.

关于 Z－分层及其生成函数列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 的性质，在[6]中有广泛的讨论.这里仅列出一些最基本的结论，它们对以后的讨论有用.

命题 3 (1) $\forall n(Z_n\subset Z_{n+1})\ \&\ Z_0=PR$（$PR$ 为原始递归函数类）；

(2) 对任何 n，如果 $f\in Z_n$，则存在 c 使得

$$f(x_1,\cdots,x_k)\leqslant A_{n+1}(c,\max(x_1,\cdots,x_k));$$

(3) 对任何 n，Z_{n+1} 中含有 Z_n 的通用函数；

(4) 对任何 $n\geqslant 1$ 均有

(4.1) $A_n(2,y)\geqslant 4y\ \&\ A_n(x,y+z)\geqslant A_n(x,y)+z$,

(4.2) $A_n(x+1,y)\geqslant A_n(x,y+1)$,

(4.3) $A_n(x+1,y)>A_n(x,y)$,

(4.4) $A_n(x,y+1)>A_n(x,y)$,

(4.5) $A_{n+1}(x,y)\geqslant A_n(x,y)$,

(4.6) $A^t_{n+1}(x,y)\leqslant A_{n+1}(x+1,y+t)$,

其中 $A^0_{n+1}(x,y)=y$, $A^{t+1}_{n+1}(x,y)=A_{n+1}(x,A^t_{n+1}(x,y))$.

下面我们来比较 Z－分层类中的函数与二重递归函数的关系.

引理 4 设 $g,h\in Z_n$，而 f 为由 g,h 经二重递归式(V)所定义的函数，函数 H_{n+1} 定义为

$$H_{n+1}(a,x,y)=A_{n+1}(2x+a,5y),\tag{7}$$

则存在常数 c 使对任何 x,y 均有

$$f(x,y)\leqslant H_{n+1}(c,x,y).\tag{8}$$

从而可知，Z_n 中的函数被(V)作用后所得的新函数将被 Z_{n+1} 中的函数所界.

证明 设 $g,h\in Z_n$，则依命题 3(2)，存在常数 c（不妨设 $c\geqslant 2$）使

$$g(x,y,u,v)\leqslant A_{n+1}(c,\max(x,y,u,v))\tag{9}$$

并且

$$h(x,y,z)\leqslant A_{n+1}(c,\max(x,y,z)).\tag{10}$$

现关于 x,y 进行二重归纳证明(8)式.当 $x=0$ 或 $y=0$ 时结论显见，现考虑归纳推步如下

$$f(x+1,y+1)=g(x,y,f(x,h(x,y,f(x+1,y))),f(x+1,y)) \qquad (由(2))$$
$$\leqslant A_{n+1}(c,\max(x,y,f(x,h(x,y,f(x+1,y))),f(x+1,y))) \qquad (由(9))$$
$$\leqslant A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y)))) \qquad (由归纳假设及(10))$$
$$=A_{n+1}(c,A_{n+1}(2x+c,4A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y))) \qquad (由(7))$$
$$\leqslant A_{n+1}(c,A_{n+1}(c+2x,A_{n+1}(2,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y)) \qquad (由命题 3(4.1))$$
$$\leqslant A_{n+1}^4(2x+c,H_{n+1}(c,x+1,y)) \qquad (由命题 3(4.1))$$
$$\leqslant A_{n+1}(2x+c+1,A_{n+1}(2x+2+c,5y)+4) \qquad (由命题 3(4.6)及(7))$$
$$\leqslant A_{n+1}(2x+c+1,A_{n+1}(2x+c+2,5y+4)) \qquad (由命题 3(4.1))$$
$$=A_{n+1}(2(x+1)+c,5(y+1)) \qquad (由(6)式)$$
$$=H_{n+1}(c,x+1,y+1). \qquad (由(7)式)$$

由归纳原理,引理得证.

引理 5　设 $g,h\in Z_n$,f 为由 g,h 经(Ⅴ)所定义的函数.　如果以 $C_f(x,y)$表示运用(Ⅱ)计算 $f(x,y)$的步数(即运用(Ⅴ)中方程的次数).则存在常数 c 使对任何 x,y 均有

$$C_f(x,y)\leqslant B_{n+1}(c,x,y), \qquad (11)$$

其中 B 由下列参数变异的原始递归式所定义

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} B_{n+1}(c,0,y)=1, & (12)\\ B_{n+1}(c,x+1,y)=(2y+3)B_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y))). & (13)\end{cases}$$

证明　依命题 3(2)及引理 4,选定 c 使下式成立

$$h(x,y,z)\leqslant A_{n+1}(c,\max(x,y,z))\ \&\ f(x,y)\leqslant H_{n+1}(c,x,y). \qquad (14)$$

现关于 x,y 进行二重归纳证明(11)式.当 $x=0$ 或 $y=0$ 时结论显然.现进行归纳推步如下

$$C_f(x+1,y+1)=C_f(x,h(x,y,f(x+1,y)))+C_f(x+1,y)+1 \qquad (由(2))$$
$$\leqslant B_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y)))$$
$$\quad +B_{n+1}(c,x+1,y)+1 \qquad (由归纳假设(14)及 C_f 的单调递增性)$$
$$=B_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y))$$
$$\quad +(2y+3)B_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y)))+1 \qquad (由(13))$$
$$\leqslant(2y+5)B_{n+1}(c,x,A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x+1,y+1))) \qquad (单调递增性)$$
$$=B_{n+1}(c,x+1,y+1). \qquad (由(13))$$

依归纳原理,引理得证.

定理 6　如果 $g,h\in Z_n$,而 f 为由 g,h 经(Ⅴ)所定义的函数,则 $f\in Z_{n+1}$.

证明　首先,依命题 3(2),取定常数 c 使(9)(10)成立,再依引理 4,引理 5 知,此时(8)和(11)也必然成立.并且显然有 $B_{n+1},H_{n+1}\in Z_{n+1}$.现令

$$F(x,y)=A_{n+1}(c,H_{n+1}(c,x,y)),$$
$$d(x,y)=F^{B_{n+1}(c,x,y)}(x,y),$$

其中复迭关于第二变元进行.

$$\theta(x,y;i,j)=\begin{cases}1 & 如果\ i\leqslant x\ \&\ j\leqslant d(x,y)\ \&\ (j\neq 0\rightarrow h(i,j,f(i,j-1)\leqslant d(x,y))\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

$$\varphi(x,y)=\prod_{\substack{i\leqslant x\\ j\leqslant d(x,y)}} P_{(i,j)}^{f(i,j)\cdot\theta(x,y;i,j)},$$

$$\psi(x,y) = \prod_{\substack{i \leqslant x \\ j \leqslant d(x,y)}} P_{\langle i,j\rangle}^{H_{n+1}(c,i,j)}.$$

不难验证，此时必有下列几条成立：

(1) 如果在运用(Ⅴ)计算 $f(x,y)$ 之值时用到了 $f(i,j)$，则 $\theta(x,y;i,j)=1$；

(2) $\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y)$；

(3) F,d,ψ 均在 Z_{n+1} 中.

另一方面，由于 Z_{n+1} 总包含原始递归函数类 PR，从而易见 Z_{n+1} 关于受限 μ—算子封闭. 因此，我们可以在 Z_{n+1} 中用受限 μ—算子来定义 φ，具体地说，$\varphi(x,y)$ 为满足下列条件之最小的 z：

(i) $z\leqslant\psi(x,y)$；

(ii) 对任何 $i\leqslant x$ 及 $j\leqslant d(x,y)$ 有

(a) 若 $i=0$ 或 $j=0$，则 $\quad ep(\langle i,j\rangle,z)=0$，

(b) 若 $i\neq 0$ & $j\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&ep(\langle i,j\rangle,z)\\&=g(i-1,j-1,ep(\langle i-1,h(i-1,j-1,ep(\langle i,j-1\rangle,z))\rangle,z),ep(\langle i,j-1\rangle,z)).\end{aligned}$$

由于上面这些条件都可在 Z_{n+1} 中表出，因此可得 $\varphi\in Z_{n+1}$，又由于 $f(x,y)=ep(\langle x,y\rangle,\varphi(x,y))$，故 $f\in Z_{n+1}$. 定理得证.

定理 7 Z—分层函数类 $Z=\bigcup_{n\in\omega}Z_n$ 恰好为二重递归函数类 MR_2. 从而 Z—分层给了 MR_2 上的一种自然的 Grzegorczyk 型分层.

证明 首先，由(Ⅶ)可知，对任何 n，A_{n+1} 是由 A_n 经二重递归式所定义的函数. 因而，可以从 $A_0,A_1,A_2,\cdots$ 逐步地把任何 A_n 都在 MR_2 中用二重递归式定义出来，即任何 n，$A_n\in MR_2$. 再根据 Z_n 的定义便有 $Z_N\subseteq MR_2$. 所以 $Z=\bigcup_{n\in\omega}Z_n\subseteq MR_2$.

另一方面，对任何函数 $f\in MR_2$，关于其在 MR_2 中定义过程的长度归纳并利用定理 6 的结论可以证明，总有 n 使 $f\in Z_n$，从而 $f\in Z$. 即知 $MR_2\subseteq Z$. 综上即得 $Z=MR_2$，定理得证.

由定理 7 立即可以得到我们的主要结论

定理 8 二重递归函数类 MR_2 可以由本原函数开始，经复合、原始递归及下列形式的二重递归式而生成.

$$\begin{cases}f(0,y)=g(y)\\f(x+1,0)=f(x,1)\\f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y)).\end{cases}$$

注意到，当在上式中取定 $g(y)$ 为后继函数 Sy 时所得的函数即为径 Robinson 和 Péter 修改过后的 Ackermann 函数，它常作为非原始递归函数的例子而被列举出来. 定理 8 表明了这个函数确实是最典型的二重递归函数. 不仅如此，我们注意到(Ⅶ)中所定义的函数列 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 中的每一个 $A_n(n>0)$ 都是与 Ackermann 函数具有类似性质的函数，而定理 7 的结论还表明了，如果加入这个函数列作为开始函数后，甚至可以不用任何二重递归运算，便可以得到二重递归函数类 MR_2. 这就是下列推论

推论 9 二重递归函数类 MR_2 可以由本原函数及 $\{A_n;n\in\omega\}$ 出发. 经复合和原始递归运算作用而生成.

注 关于一般的 n—重递归定义模式,作者将在另文作进一步的化归.

参 考 文 献

[1] A. Grzegorczyk, *Some classes of recursive functions*, Rozprawy Math. No. IV 1953, 1—45.

[2] 莫绍揆,递归论,科学出版社,1987.

[3] R. Péter, *Über die mehrfache rekursion*, Math Ann. 113(1936), 489—527.

[4] R. Péter, *Rekursive Funktionen*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1951(中译本《递归函数论》,莫绍揆译,科学出版社,1958).

[5] H. E. Rose, *Subrecursion: Functions and Hierarchies Oxford Logic Guides* 9, Oxford University Press, 1984.

[6] 郑锡忠,钱磊, An extension of Grzegorczyk's hierarchy《理论计算机 91 学术年会论文集》34—46.

Double Recursive Functions and Their Hierarchy

Zheng Xizhong

(Dept. of Math., Nanjing University)

Abstract

This paper discusses the properties of double recursive functions which are defined by R.Peter in [3]. An equivalent characterization of double recursive functions is suggested, which is defined to be the class $z = \cup_{n \in \omega} z_n$ of z-hierarchy. Then, a Grzegorczyk type hierarchy of double recursive functions is obtained by means of the results of [6]. Furthermore, the standard double recursion of R.Peter is reduced to a more simple scheme.