第13卷第2期 1993年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 2 May 1993

对《Liénard 方程的无穷远奇点和极限环》一文的补正*

王 现
(南京大学数学系,210008)

文[1]考虑 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{1}$$

和他在相平面的等价系统

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x)y-g(x), \tag{2}$$

其中 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ 是多项式,且 $m\geqslant n>0$. 作者引用 50 年代 R. E. Gomory[2] 对系统(2)的无穷远奇点之完整分析结果给出了几个定理,其中所阐明的思想方法和结果,是很有意义的. 这里我们作三点补正,使之更臻完善.

1. 文[1]中说"(我们)给出了关于系统(2)极限环存在性的一个新判据(指原定理 3),为了决定极限环的存在性,早先的某些结果(见[3],ch4 和 5)不能应用,或即使能用研究步骤也是十分复杂的."又举

$$\ddot{x}+[1-(m+1)x^m]\dot{x}+2x=0,\ m\geqslant 2\ \text{偶数} \tag{12}$$

为例来作了说明. 这是欠周的. 只要考虑(12)在 Liénard 平面上的等价系统,并令 $t=-\tau$, $y\to -y$,将其化为

$$\frac{dx}{d\tau}=y-(x^{m+1}-x),\quad \frac{dy}{d\tau}=-2x, \tag{12'}$$

容易检验(12′)满足 Драгилёв 定理的条件,故(12′)至少存在一个稳定极限环,注意 $t=-\tau$,便知(12)至少存在一个不稳定极限环.

事实上,文[1]定理 3 本身,也可用 Драгилёв 定理立即导出. 下面我们给出一个更为一般的结果. 不失一般性,设 $b_0=0$.

2. **定理Ⅲ** 设 m 为偶数,n 为奇数,$b_n>0$,则当 $a_m>0(a_m<0)$,且(2)的全部有限远奇点构成指标+1的不稳定(稳定)奇点系或奇点—环系(参看[4])$S_1(S_2)$时,(2)至少存在一个包含 $S_1(S_2)$ 的稳定(不稳定)极限环.

证明 法 1) 根据[2],m 为偶数,n 为奇数,$b_n>0$,且 $a_m>0(a_m<0)$ 时,系统(2)的无穷远奇点是排斥的(吸引的),如[2]中 Fig29a,1(Fig. 30)所示,而 $S_1(S_2)$ 是不稳定的(稳定的),故由 Poincare—Bendixson 环域定理立即便可得定理的结论.

法 2) 考虑(2)在 Liénard 平面上的等价系统

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x), \tag{2'}$$

* 1991年8月17日收到. 国家教委博士点基金资助项目.

其中 $F(x)=\int_0^x f(s)ds=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}a_ix^{i+1}$. 又令 $G(x)=\int_0^x g(s)ds=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}b_jx^{j+1}$. $a_m>0$ 时，$F(\infty)=\infty, F(-\infty)=-\infty, G(\pm\infty)=\infty$，显然. 于是由[4]定理 3(Драгилёв 定理的推广)便立即可得结论. 对 $a_m<0$ 的情形，令 $t=-\tau, y\to -y$，由已证结果便可导出.

3. 文[1]定理 4 所得为局部分枝结果，图 3－4 所示仅为 $O(0,0)$ 邻域内和无穷远邻域内轨线的性态. 因为大范围极限环的个数问题非常困难，若暂时置之不顾而仅讨论指标＋1 的奇点之局部分枝问题时，对 m,n 的奇偶性，a_m, b_n 的符号都没有限制的必要，就是开始时 $m\geqslant n$ 的限制也可取消. 这方面 N. G. Lloyd 等在文[5]等中作了深入研究，当然对这种一般的情形，也许多次分枝问题较复杂，在[5]中未予讨论，但相应文[1]定理 4 的简单情形，我们不难给出下列定理. 如上设 $b_0=0$.

定理Ⅳ 设 $O(0,0)$ 是系统(2′)的一个奇点，且 $b_1>0$. 则当 $|a_0|<<1, a_0<0, a_1b_2<a_2b_1$ $(a_0>0, a_1b_2>a_2b_1)$* 时，(2′)在 O 的邻域内至少存在一个稳定(不稳定)的极限环.

证明 经尺度变换 $y\mapsto y/\sqrt{b_1}$，$x\mapsto\sqrt{b_1}t$，(2′)化为

$$\dot{x}=y-\left(\frac{a_0}{\sqrt{b_1}}x+\frac{a_1}{2\sqrt{b_1}}x^2+\frac{a_2}{3\sqrt{b_1}x^3}+\cdots+\frac{a_m}{(m+1)\sqrt{b_1}}x^{m+1}\right),$$

$$\dot{y}=-\left(x+\frac{b_2}{b_1}x^2+\cdots+\frac{b_n}{b_1}x^n\right).$$

根据[5]，§ 2 可得 O 的前面两个焦点值为 $\eta_2=-a_0/\sqrt{b_1}$， $\eta_4=\frac{1}{8b_1\sqrt{b_1}}(a_1b_2-a_2b_1)$. 由此可知，$a_0=0, a_1b_2<a_2b_1$ $(a_1b_2>a_2b_1)$ 时，O 是稳定(不稳定)的一阶细焦点，而当 $a_0<0, a_1b_2<a_2b_1$ $(a_0>0, a_1b_2>a_2b_1)$ 时，O 变成不稳定(稳定)的奇点了. 于是由熟知的 Hopf 分枝定理便可得定理的结论.

参 考 文 献

[1] 张寄洲，Liénard 方程的无穷远奇点和极限环，数学研究与评论，Vol. 10, No. 1, 137－143, 1990.

[2] R. E. Gomory, *Contribution to the theory of nonlinear oscillations*, Vol. Ⅲ, 85－126, 1956.

[3] 张芷芬等，微分方程定性理论，科学出版社，1985.

[4] 王现，数学季刊，Vol. 5, No. 1－2, 122－130, 1990.

[5] N. G. Lloyd and S. Lynch, Proc. R. Soc. Lond. A418, 199－208, 1988.

* 文[1]定理 4 的陈述稍欠妥，证明的计算中有一个符号上的错误，其中 C_4 应为 $-\frac{1}{4}(a_2'-a_1'b_2')$，故和这里的不一致.