第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

一类具有 C. Neumann 约束的 Hamilton 系统及 WKI 孤子族*

乔 志 军
(辽宁大学数学系,沈阳 110036)

摘 要

本文首先求出 WKI 孤子向量场的换位表示;尔后应用特征值的泛函梯度,得到一种 C. Neumann 约束,在该约束下,与 WKI 发展方程族相联系的保谱问题(WKI 谱问题)被非线性化为一个 Hamilton 系统.最后,我们讨论了 C. Neumann 约束与定态 WKI 孤子系统之间的关系.

§1 WKI 向量场的换位表示

自从曹策问[1]阐明关于保谱发展方程的换位表示理论以来,这方面的研究工作已有不少([2-6]).WKI 族是一族较困难、较复杂的非线性偏微分方程,以具有孤子解而著称,受到广泛重视.下边我们先解答 WKI 孤子族的换位表示,然后讨论其非线性化所产生的 Hamilton 系统.

与 WKI 孤子族相关联的谱问题是[7](以称为 WKI 谱问题):

$$\psi_x = U\psi, \quad U = \begin{pmatrix} -i\lambda & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 λ 是谱参数;$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$,$\psi_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$;向量值函数 $u(x)\stackrel{\triangle}{=}(q(x),r(x))^T$ 称为(1.1)的位势;自变量 x 在依赖区间 Ω 内变化($\Omega=(0,T)$ 或 $(-\infty,+\infty)$);位势 $u(x)$ 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期.

命题 1.1 (1.1)的特征值 λ 关于位势 u 的泛函梯度为:

$$\nabla_u\lambda \stackrel{\triangle}{=} \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta q \\ \delta\lambda/\delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_2^2 \\ -\lambda\psi_1^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_\Omega (r\psi_1^2 + 2i\psi_1\psi_2 - q\psi_2^2)dx \right)^{-1}, \tag{1.2}$$

这里 ψ_1,ψ_2 是相应于 λ 的特征函数.

证明 在文[8]第Ⅱ节里,我们选择:$m_{11}=-i\lambda$,$m_{12}=\lambda q$,$m_{21}=\lambda r$,稍加整理就有

$$\int_\Omega (\lambda\psi_2^2\cdot\delta q - \lambda\psi_1^2\cdot\delta r)dx = \delta\lambda\cdot\left(\int_\Omega (r\psi_1^2 + 2i\psi_1\psi_2 - q\psi_2^2)dx\right)^{-1}.$$

故(1.2)式成立.

* 1991年5月13日收到. 1993年3月10日收到修改稿. 辽宁省教委青年自然科学基金资助项目.

命题 1.2　若 λ 是 WKI 谱(1.1)的一个特征值，则以(1.2)定义的 $\nabla_u\lambda$ 满足方程

$$K\nabla_u\lambda=\lambda\cdot J\nabla_u\lambda. \tag{1.3}$$

特别有

$$K\begin{pmatrix}\psi_2^2\\-\psi_1^2\end{pmatrix}=\lambda\cdot J\begin{pmatrix}\psi_2^2\\-\psi_1^2\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 K,J 是两个斜称的微分积分算子($\partial=\partial/\partial x,\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$)：

$$K=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial^2\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & \partial^3+\frac{1}{2}\partial^2\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2\\ \partial^3+\frac{1}{2}\partial^2\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\frac{1}{2}\partial^2\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&-\partial^2\\ \partial^2&0\end{pmatrix},\ p=\sqrt{1-qr}. \tag{1.5}$$

算子 K、J 称为 WKI 谱问题(1.1)的 Lenard 算子对.

证明　只须证明

$$J^{-1}K\nabla_u\lambda=\lambda\cdot\nabla_u\lambda, \tag{1.6}$$

这里

$$J^{-1}K=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}\partial+\frac{1}{2}\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\frac{1}{2}\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2\\ \frac{1}{2}\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\partial-\frac{1}{2}\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2\end{pmatrix}.$$

利用等式 $(\psi_1^2)_x=-2i\lambda\psi_1^2+2\lambda q\psi_1\psi_2$；$(\psi_2^2)_x=2i\lambda\psi_2^2+2\lambda r\psi_1\psi_2$；$(\psi_1\psi_2)_x=\lambda q\psi_2^2+\lambda r\psi_1^2$；$(\frac{r}{p})_x\cdot q+(\frac{q}{p})_x\cdot r=2\cdot(\frac{1}{p})_x$，及分部积分知识，经详细计算不难验证(1.6)式的正确性.

注　上述算子 $J^{-1}K$ 就是文[9]中的递归算子 G.

命题 1.3　WKI 谱问题(1.1)等价于

$$L(u)\psi=\lambda\psi,\ L(u)=\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix}i&-q\\-r&-i\end{pmatrix}\partial,\ \partial=\partial/\partial x. \tag{1.7}$$

引理 1.4　对于(1.7)中的谱算子 $L=L(u)$，其 Gateaux 微分映射为

$$L_{*u}(\xi)\overset{\triangle}{=}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi)=\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix}q\xi_2&-i\xi_1\\ i\xi_2&r\xi_1\end{pmatrix}L,\ \forall\ \xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

且 L_{*u}(以下简记为 L_*)是单态.

证明　按 $L_{*u}(\xi)$ 的定义并注意 $\partial=\begin{pmatrix}-i&q\\r&i\end{pmatrix}L$，经计算必得(1,8)式.

$L_{*u}(\xi)=0\Leftrightarrow\xi=0$. 是明显的.

令 $V=\begin{pmatrix}-i&q\\r&i\end{pmatrix}$，那么 $V^{-1}=\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix}i&-q\\-r&-i\end{pmatrix}$ 且 L 可写为 $L=V^{-1}\partial$. 设 A、B、C、E、F 为待定的函数，令 $W_1=\begin{pmatrix}0&F\\E&0\end{pmatrix}$，$W_2=\begin{pmatrix}A&B\\C&-A\end{pmatrix}$. 以下我们做二算子 $W=W_1+W_2L$，$L=V^{-1}\partial$ 的换位子 $[W,L]\overset{\triangle}{=}WL-LW$(注意 $\partial=VL$)：

$$(*)\qquad\begin{aligned}[W,L]&=[W_1,L]+[W_2,L]L\\&=-V^{-1}W_{1x}+([W_1,V^{-1}]V-V^{-1}W_{2x})L+[W_2,V^{-1}]VL^2\end{aligned}$$

$$
=\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} qE_x & -iF_x \\ iE_x & rF_x \end{pmatrix}
+\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} -iA_x+qC_x-i(qE+rF) & -iB_x-qA_x+2F+q(qE-rF) \\ rA_x+iC_x+2E+r(rF-qE) & rB_x-iA_x+i(qE+rF) \end{pmatrix}L
+\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} -2qrA-i(Br+qC) & 2B-2iqA+q(qC-rB) \\ 2C+r(rB-qC)-2irA & 2qrA+i(Br+qC) \end{pmatrix}L^2.
$$

我们希望

$$
[W,L]=L_*(KG)L^{-1}-L_*(JG). \tag{1.9}
$$

即

$$
[W,L]=\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} q(KG)^{(2)} & -i(KG)^{(1)} \\ i(KG)^{(2)} & r(KG)^{(1)} \end{pmatrix}-\frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} q(JG)^{(2)} & -i(JG)^{(1)} \\ i(JG)^{(2)} & r(JG)^{(1)} \end{pmatrix}L, \tag{1.10}
$$

其中 K、J 是 Lenard 算子对(1.5)；$G(x)=(G^{(1)}(x),G^{(2)}(x))^T$，$G^{(1)}(x)$，$G^{(2)}(x)$是 Ω 上的任二光滑函数；$(\cdot)^{(i)}$ $(i=1,2)$表示$(\cdot)$的第 i 个分量.

为此，我们应选 A、B、C、E、F 为：

$$
A(G)=\frac{1}{2i}\frac{1}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}G^{(1)}_{xx}-\frac{r}{p}G^{(2)}_{xx}\right),\quad B(G)=\frac{q}{2p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}G^{(1)}_{xx}-\frac{r}{p}G^{(2)}_{xx}\right),
$$

$$
C(G)=\frac{r}{2p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}G^{(1)}_{xx}-\frac{r}{p}G^{(2)}_{xx}\right),\qquad E(G)=\frac{1}{2i}\left(G^{(1)}_{xx}+\frac{1}{2}\partial\frac{r}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}G^{(1)}_{xx}-\frac{r}{p}G^{(2)}_{xx}\right)\right),
$$

$$
F(G)=\frac{1}{2i}\left(G^{(2)}_{xx}-\frac{1}{2}\partial\frac{q}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}G^{(1)}_{xx}-\frac{r}{p}G^{(2)}_{xx}\right)\right). \tag{1.11}
$$

从而我们得到

定理 1.5 设 $G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$为 Ω 上的两个任意光滑函数，$G=(G^{(1)},G^{(2)})^T$. 令算子

$$
W=W(G)=\begin{pmatrix} 0 & F(G) \\ E(G) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A(G) & B(G) \\ C(G) & -A(G) \end{pmatrix}L, \tag{1.12}
$$

其中 $A(G)$、$B(G)$、$C(G)$、$E(G)$、$F(G)$如(1.11)中所述，谱算子 L 如(1.7)中所示. 那么 W 必满足由 Lenard 算子对 K、J 生成的算子方程

$$
[W,L]=L_*(KG)L^{-1}-L_*(JG), \tag{1.13}
$$

证明 将 $A(G)$、$B(G)$、$C(G)$、$E(G)$、$F(G)$的表达式(1.11)依次代入(＊)式的右端，并注意 $rB=qC$，$C=irA$，$B=iqA$，$E=\frac{1}{2i}G^{(1)}_{xx}+\frac{1}{2}(rA)_x$，$F=\frac{1}{2i}G^{(2)}_{xx}-\frac{1}{2}(qA)_x$，$A_x(1-qr)-\frac{1}{2}(qr)_xA=p(Ap)_x$，$p=\sqrt{1-qr}$，就不难算得其结果等于(1.10)的右端.

现递推定义(1.1)的 Lenard 梯度叙列$\{G_j\}$：

$$
G_{-1}=(1,-1)^T,\ G_0=J^{-1}KG_{-1}=\left(i\frac{r}{p},i\frac{q}{p}\right)^T,\ p=\sqrt{1-qr}.
$$

$$
G_j=J^{-1}KG_{j-1},\ j=0,1,2,\cdots. \tag{1.14}
$$

$X_m\stackrel{\triangle}{=}JG_m$ $(m=0,1,2,\cdots)$称为 WKI 向量场，前两个计算结果为：$X_0=\left(-i\left(\frac{q}{p}\right)_{xx},i\left(\frac{r}{p}\right)_{xx}\right)^T$，$X_1=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{q_x}{p^3}\right)_{xx},\left(\frac{r_x}{p^3}\right)_{xx}\right)^T$. WKI 孤子族由向量场 X_m 产生，即

$$
u_t=(q,r)^T_t=X_m(q,r),\ m=0,1,2,\cdots. \tag{1.15}
$$

特别指出，当 $r=-1$ 时，令 $1+q=s$，那么 $u_t=X_1(q,-1)$便化为著名的 Harry—Dym 方程

$$s_t = -\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)_{xxx}.$$

定理 1.6 设 $G_j = (G_j^{(1)}, G_j^{(2)})^T$ 为(1.1)的 Lenard 叙列，令 $W_j = W(G_j), V_m = \sum_{j=0}^{m} W_{j-1} \cdot L^{m+1-j}$, $(m=0,1,2,\cdots)$，则 $[V_m, L] = L_*(X_m)$, $m=0,1,2,\cdots$.

证明 $[V_m, L] = \sum_{j=0}^{m}[W_{j-1}, L]L^{m+1-j} = \sum_{j=0}^{m} L_*(KG_{j-1})L^{m-j} - L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1} = \sum_{j=0}^{m} L_*(JG_j)L^{m-j} - L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1} = L_*(JG_m) - L_*(JG_{-1})L^{m+1} = L_*(X_m)$.

推论 1.7 WKI 孤子族(1.15)具有换位表示 $L_t = [V_m, L]$ $m=0,1,2,\cdots$.

证明

$$L_t = \frac{1}{(1-qr)^2}\begin{pmatrix} i(rq_t + qr_t) & -(q_t + q^2 r_t) \\ -(r_t + r^2 q_t) & -i(rq_t + qr_t)\end{pmatrix}\partial = L_*(u_t),\ u = (q, r)^T.$$

$$L_t - [V_m, L] = L_*(u_t) - L_*(X_m) = L_*(u_t - X_m)$$

又 L_* 是单态，故推论 1.7 正确.

推论 1.8 位势 $u=(q,r)^T$ 是定态非线性 WKI 系统 $X_N + \alpha_1 X_{N-1} + \cdots + \alpha_N X_0 = 0$ 的一个有限带之充要条件是算子 $V_N + \alpha_1 V_{N-1} + \cdots + \alpha_N V_0$ 与 L 可换. 这里 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 是一些常数.

§2 Hamilton 系统与一个定态 WKI 方程

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为(1.1)的 N 个互不相同的特征值，那么我们有

$$\begin{cases}\psi_{1x} = -i\Lambda\psi_1 + q\Lambda\psi_2 \\ \psi_{2x} = r\Lambda\psi_1 + i\Lambda\psi_2\end{cases}, \tag{2.1}$$

其中，$\psi_k = (\psi_{k1}, \cdots, \psi_{kN})^T$ $(k=1,2)$；$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$；$\psi_{1j}, \psi_{2j}$ 为相应于 λ_j $(j=1,2,\cdots,N)$ 的特征函数.

作 C. Neumann 约束[10]

$$G_{-1} = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot \nabla_u \lambda_j, \quad \gamma_j \stackrel{\triangle}{=} \int_{\Omega} (\gamma\psi_{1j}^2 + 2i\psi_{1j}\psi_{2j} - q\psi_{2j}^2)dx. \tag{2.2}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_{2j}^2 \\ -\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_{1j}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Lambda\psi_2, \psi_2 \rangle \\ -\langle \Lambda\psi_1, \psi_1 \rangle \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

这里〈·，·〉代表示 R^N 中的标准内积.

将(2.3)中两式对 x 求微分，并利用(2.1)，则位势 q、r 必然满足约束条件：

$$q = \frac{i\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2\rangle}, \quad r = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2\rangle}. \tag{2.4}$$

因而，在 C. Neumann 约束(2.4)下，(2.1)被非线性化为：

$$
\begin{cases}
\psi_{1x} = -i\Lambda\psi_1 + i\dfrac{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}\Lambda\psi_2 \\
\psi_{2x} = i\Lambda\psi_2 - i\dfrac{\langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}\Lambda\psi_1
\end{cases} \tag{2.5}
$$

考虑 C^{2N} 上一个光滑流形：

$$
M = \{(\psi_1,\psi_2) \in C^{2N} | F_1 = \frac{1}{2}(\langle \Lambda\psi_1,\psi_1\rangle - 1) = 0,\ F_2 = \frac{1}{2}(\langle \Lambda\psi_2,\psi_2\rangle - 1) = 0\}
$$

那么 M 为 $2N-2$ 维辛流形(见文[11]). 如下讨论 M 上的 C. Neumann 约束.

令 $H=-i\langle \Lambda\psi_1,\psi_2\rangle$，显然 Hamilton 系统 $(C^{2N}, d\psi_2\Lambda d\psi_1, H)$ 是完全可积的. 计算辛空间 $(C^{2N}, d\psi_2\Lambda d\psi_1)$ 中的 Poisson 括号[11]：$(F_1,F_2)=\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle$， $(H,F_1)=i\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle$， $(H,F_2)=-i\langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle$. 命 $H^*=H-\lambda_1F_1-\lambda_2F_2$，由 H^* 的 Hamilton 向量场与 M 相切的条件 $(H^*,F_1)=0$，$(H^*,F_2)=0$，可确定 Lagrange 乘子 λ_1,λ_2：

$$
\lambda_2 = \frac{(H,F_1)}{(F_2,F_1)} = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}, \quad \lambda_1 = \frac{(H,F_2)}{(F_1,F_2)} = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}. \tag{2.6}
$$

注意到在 M 上 $F_1=0, F_2=0$，故 $H^*=H-\lambda_1F_1-\lambda_2F_2$ 在辛流形 M 上的正则方程为

$$
(H^*):\quad
\begin{cases}
\psi_{1x} = \dfrac{\partial H^*}{\partial\psi_2} = \dfrac{\partial H}{\partial\psi_2} - \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_2} - \lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial\psi_2} = -i\Lambda\psi_1 + i\dfrac{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}\Lambda\psi_2 \\
\psi_{2x} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial\psi_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial\psi_1} + \lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial\psi_1} + \lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial\psi_1} = i\Lambda\psi_2 - i\dfrac{\langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}\Lambda\psi_1
\end{cases}. \tag{2.7}
$$

这恰为 C. Neumann 约束(2.3)、(2.4)下的非线性化系统(2.5)，因此我们得到

定理 2.1 (2.1)在 M 上的非线性化方程组(2.5)可表为辛流形 M 上的一个 Hamilton 系统 $(M, d\psi_2\Lambda d\psi_1|_M, H^*)$，其中 $H^*=H-\lambda_1F_1-\lambda_2F_2$，$\lambda_1,\lambda_2$ 由(2.6)给出.

定理 2.2 设 (ψ_1,ψ_2) 是辛流形 M 上 Hamilton 系统(2.7)的一个解析解. 那么

$$
q = \frac{i\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}, \quad r = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle} \tag{2.8}
$$

是一个定态 WKI 孤子方程 $X_N+\alpha_1X_{N-1}+\cdots+\alpha_NX_0=0$，$N=1,2,\cdots$ 的解. 其中，$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 是适当选取的常数.

证明 用算子 $J^{-1}K$ 作用(2.3)的两端，我们有

$$
G_0 \triangleq \begin{pmatrix} i\dfrac{r}{p} \\ i\dfrac{q}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Lambda^2\psi_2,\psi_2\rangle \\ -\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle \end{pmatrix}, \quad p = \sqrt{1-qr}. \tag{2.9}
$$

又 $q=\dfrac{i\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_1\rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}$，于是 $p=\dfrac{1}{\langle \Lambda^2\psi_1,\psi_2\rangle}$.

进一步，让算子 $J^{-1}K$ 作用(2.9)k 次，并利用 Lenard 算子对 K、J 的性质(1.3)及(1.14)，不难得到

$$
G_k + \beta_2G_{k-2} + \cdots + \beta_kG_0 + \beta_{k+1}G_{-1} = \begin{pmatrix} \langle \Lambda^{k+2}\psi_2,\psi_2\rangle \\ -\langle \Lambda^{k+2}\psi_1,\psi_1\rangle \end{pmatrix}, \tag{2.10}
$$

其中 $\beta_2,\cdots,\beta_k,\beta_{k+1}$ 是常数，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$.

考察由特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 生成的 $N+2$ 次($N\geqslant1$)多项式

$$P(z) \triangleq \prod_{j=1}^{N} z^2(z-\lambda_j) = \sum_{k=0}^{N} p_{N-k} z^{k+2}, \tag{2.11}$$

这里 $p_0=1, p_1, \cdots, p_N$ 由 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 确定. 用算子 $J\sum_{k=0}^{N} p_{N-k}$ 作用(2.10)的两端,并注意(2.11),我们立即得到

$$J\sum_{k=0}^{N} p_{N-k}(G_k + \beta_2 G_{k-2} + \cdots + \beta_k G_0 + \beta_{k+1} G_{-1}) = J\begin{pmatrix} \langle \psi_2, P(\Lambda)\psi_2 \rangle \\ -\langle \psi_1, P(\Lambda)\psi_1 \rangle \end{pmatrix} = 0.$$

利用向量场的定义 $X_j = JG_j$ 整理上式,即有 $X_N + \alpha_1 X_{N-1} + \cdots + \alpha_N X_0 = 0$,其中,$\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 是由 $p_1, \cdots, p_N$ 与 $\beta_2, \cdots, \beta_N$ 所确定的常数. 证毕.

参 考 文 献

[1] 曹策问,科学通报,34(1989),10:723.

[2] 许太喜,顾祝全,科学通报,34(1989),18:1437.

[3] 马文秀,科学通报,35(1990),24:1843.

[4] 乔志军,科学通报,35(1990),17:1353.

[5] 乔志军,应用数学,4(1991),4:64.

[6] 周汝光,与一个四阶特征值问题相联系的 Lax 组非线性化,郑州大学硕士论文,1989.

[7] M. Boiti, F. Pempinell and G. Tu, Prog. of Theoretical Phys., 69(1983), 1:48.

[8] 曹策问,中国科学 A 辑,1989,7:701.

[9] Li Yishen, Chen Dengyuan and Zeng Yunbo, Proc. 1983 Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Equ's, Sci. Press, Beijing, 1986, 359.

[10] Cao C. W. and Geng X. G., in: Research Reports in Physics, Nonlinear Physics, eds. C. Gu etal. (Springer, Berlin, 1990), 68.

[11] 谷超豪等著,孤立子理论与应用,第四章,195,浙江科学技术出版社,杭州,1990.

A Knid of Hamiltonian System with C.Neumann Constraint and WKI Hierarchy

Qiao Zhijun

(Dept. of Math., Liaoning University, Shenyang)

Abstract

In this paper, the commutator representations of the WKI vector fields are first presented. Then using the functional gradient of eigenvalue, we obtain a kind of C.Neumann constraint under which the isospectral problem (WKI eigenvalue problem) related to the WKI hierarchy of evolution equations is nonlinearized as a Hamiltonian system. Finally, we discuss the relation between the C.Neumann constraint and a stationary solition system.