第13卷第3期 1993年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 3 Aug. 1993

一类积分算子的近于凸性*

李 春 明
(哈尔滨冶金测量专科学校，150001)

§1 引 言

设 A 表示单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 中正则函数 $f(z)=z+\cdots$ 的全体，S 表示 A 中单叶函数的全体. 又设 $0\leqslant\rho<1,\alpha>0$. 对于 S 中的函数 $f(z)$，如果它满足条件

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>\rho,\quad z\in D,$$

则称 $f(z)$ 为 ρ 级星像函数；如果存在某一 ρ 级星像函数 $g(z)$，使得

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\}>\rho,\quad z\in D,$$

则称 $f(z)$ 为 ρ 级近于凸函数；如果存在某一 ρ 级星像函数 $g(z)$，使得

$$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)f(z)^{\alpha-1}}{g(z)^{\alpha}}\}>\rho,\quad z\in D,$$

则称 $f(z)$ 为 ρ 级 α 型 Bazilevič 函数. 命 $S^*(\rho),C(\rho)$ 和 $B_\alpha(\rho)$ 分别表示 S 中的 ρ 级星像函数，ρ 级近于凸函数和 ρ 级 α 型 Bazilevič 函数的全体. 由这些函数族的定义知道，$S^*(\rho)\subset S^*(0)=S^*,C(\rho)\subset C(0)=C,B_\alpha(\rho)\subset B_\alpha(0)=B_\alpha$，其中 S^*,C 和 B_α 分别为熟知的星像函数族，近于凸函数族和 α 型 Bazilevič 函数族. 对于 A 中的函数 $f(z)$，Kaplan[1] 证明了 $f(z)\in C$ 的充分必要条件是当 $z\in D$ 时 $f'(z)\neq0$，并且

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}d\varphi>-\pi,$$

其中 $z=re^{i\varphi}$，$0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant2\pi$，$0\leqslant r<1$，$\varphi$ 为实数.

下面定义几个 A 的子族：

设 $f(z)\in A,0<\alpha\leqslant1,\beta>0$. 如果存在某一函数 $g(z)\in S^*(\rho)$，使得

$$|\arg\{\frac{zf'(z)f(z)^{\beta-1}}{g(z)^{\beta}}\}|<\frac{\alpha\pi}{2},$$

则说 $f(z)\in SB_\beta(\alpha,\rho)$；如果存在某一 $g(z)\in S^*(\rho)$，使得 $|\arg\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\}|<\frac{\alpha\pi}{2}$，则说 $f(z)\in C(\alpha,\rho)$；如果存在某一 $g(z)\in S^*(\rho)$ 使得 $|\arg\{\frac{f(z)}{g(z)}\}|<\frac{\alpha\pi}{2}$，则说 $f(z)\in CS^*(\alpha,\rho)$.

由上述三个定义即有下列关系式成立：

* 1991年5月7日收到.

$SB_\beta(\alpha,\rho)\subset SB_\beta(1,0)=B_\beta,\quad C(\alpha,\rho)\subset C(1,0)=C,\quad CS^*(\alpha,\rho)\subset CS^*(1,0)=CS^*,$

其中 CS^* 是由 O. Reade[2] 引进的近于星函数族.

当 $f_i(z)\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$, $g_j(z)\in C(\beta_j,\sigma_j)$时,S. L. Shukla 和 Vindo Kumar[3] 研究了积分算子

$$\int_0^z\{\prod_{i=1}^n[\frac{f_i(t)}{t}]^a\prod_{j=1}^m[g_j'(t)]^b\}dt$$

的近于凸性. 本文讨论了当 $f_i(z)\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$, $g_j(z)\in SB_{\gamma_j}(\beta_j,\sigma_j)$时,积分算子

$$\int_0^z\{\prod_{i=1}^n[\frac{f_i(t)}{t}]^a\prod_{j=1}^m[(\frac{g_j(t)}{t})^{\gamma_j-1}g_j'(t)]^b\}dt$$

的近于凸性,同时指出并改正了[3]中定理 3.2 的错误,得到了更广的结果.

§2 几个引理

引理 1 设 $f(z)\in S^*(\rho)$,则有

$$\rho(\varphi_2-\varphi_1)\leqslant\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}d\varphi\leqslant 2\pi(1-\rho)+\rho(\varphi_2-\varphi_1).$$

其中 $z=re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant2\pi$, $0\leqslant r<1$, φ 为实数.

此引理是 H. Silverman[4] 的一个结果.

引理 2[3] 设 $f(z)\in CS^*(\alpha,\rho)$,则有

$$-\alpha\pi+\rho(\varphi_2-\varphi_1)<\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}d\varphi<\alpha\pi+2\pi(1-\rho)+\rho(\varphi_2-\varphi_1).$$

其中 $z,\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ 均与引理 1 中的相同.

引理 3 设 $f(z)\in SB_\beta(\alpha,\rho)$,则有

$$\begin{aligned}-\alpha\pi+\beta\rho(\varphi_2-\varphi_1)&<\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}+(\beta-1)\frac{zf'(z)}{f(z)}\}d\varphi\\&<\alpha\pi+2\beta\pi(1-\rho)+\beta\rho(\varphi_2-\varphi_1),\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $z,\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ 均与引理 1 中的相同.

证明 设 $f(z)\in SB_\beta(\alpha,\rho)$,依定义存在 $g(z)\in S^*(\rho)$,使得$|\arg\{\frac{zf'(z)f(z)^{\beta-1}}{g(z)^\beta}\}|<\frac{\alpha\pi}{2}$,即

$$-\frac{\alpha\pi}{2}<\arg\{zf'(z)\}+(\beta-1)\arg\{f(z)\}-\beta\arg\{g(z)\}<\frac{\alpha\pi}{2}.\tag{2.2}$$

设 $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant2\pi$, $0\leqslant r<1$. 在(2.2)式中取 $z=re^{i\varphi_2}$,则有

$$-\frac{\alpha\pi}{2}<\arg\{re^{i\varphi_2}f'(re^{i\varphi_2})\}+(\beta-1)\arg\{f(re^{i\varphi_2})\}-\beta\arg\{g(re^{i\varphi_2})\}<\frac{\alpha\pi}{2}.\tag{2.3}$$

同样,在(2.2)式中取 $z=re^{i\varphi_1}$,则有

$$-\frac{\alpha\pi}{2}<\arg\{re^{i\varphi_1}f'(re^{i\varphi_1})\}+(\beta-1)\arg\{f(re^{i\varphi_1})\}-\beta\arg\{g(re^{i\varphi_1})\}<\frac{\alpha\pi}{2},\tag{2.4}$$

结合(2.3)和(2.4)两式可得

$$\begin{aligned}&-\alpha\pi+\beta[\arg[g(re^{i\varphi_2})\}-\arg\{g(re^{i\varphi_1})\}]\\&<\arg\{(re^{i\varphi_2}f'(re^{i\varphi_2})\}-\arg\{re^{i\varphi_1}f'(re^{i\varphi_1})\}+(\beta-1)[\arg\{(re^{i\varphi_2}-\arg\{f(re^{i\varphi_1})\}]\\&<\alpha\pi+\beta[\arg\{g(re^{i\varphi_2}\}-\arg\{g(re^{i\varphi_1})\}],\end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
&-\alpha\pi+\beta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d[\arg(g(re^{i\varphi}))] \\
&<\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d[\arg\{re^{i\varphi}f'(re^{i\varphi})\}+(\beta-1)\arg\{f(re^{i\varphi})\}] \\
&<\alpha\pi+\beta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d[\arg\{g(re^{i\varphi})\}].
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

注意到

$$
\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d[\arg\{g(re^{i\varphi})\}]=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}d\varphi,
$$

$$
\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d[\arg\{re^{i\varphi}f'(re^{i\varphi})\}]=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}d\varphi,
$$

便知(2.5)式等价于

$$
\begin{aligned}
-\alpha\pi+\beta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}d\varphi&<\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}+(\beta-1)\frac{zf'(z)}{f(z)}\}d\varphi \\
&<\alpha\pi+\beta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}d\varphi.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

由于 $g(z)\in S^*(\rho)$，由引理 1 可得

$$
\rho(\varphi_2-\varphi_1)\leqslant\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}d\varphi\leqslant 2\pi(1-\rho)+\rho(\varphi_2-\varphi_1).
\tag{2.7}
$$

将(2.7)式代入到(2.6)式，并注意到 $\beta>0$，即得(2.1)式. 证毕.

§3 主要结果

定理 设 $f_i(z)\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，$g_j(z)\in SB_{\gamma_j}(\beta_j,\sigma_j)$，$j=1,2,\cdots,m$. 命

$$
G(z)=\int_0^z\{\prod_{i=1}^{n}[\frac{f_i(t)}{t}]^a\prod_{j=1}^{m}[(\frac{g_j(t)}{t})^{\gamma_j-1}g_j'(t)]^b\}dt,
\tag{3.1}
$$

其中 a,b 为实数. 记 $n\bar{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i$，$n\bar{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，$m\bar{\sigma}=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j$，$m\bar{\beta}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j$，$m\bar{\gamma}=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j$. 则有

(1) 当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，只要 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)\leqslant\frac{3}{2}$，及 $an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta}\leqslant1$，便有 $G(z)\in C$；

(2) 当 $a\leqslant0$，$b\leqslant0$ 时，只要 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)$，便有 $G(z)\in C$；

(3) 当 $a\,b\leqslant0$ 时，只要 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}-bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})\leqslant\frac{3}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(-an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)\leqslant\frac{3}{2}$ 便有 $G(z)\in C$. 在上述各种情况下，$[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$不能换成更大的区间.

证明 当 $z\in D$ 时，显然 $G'(z)\neq0$. 对(3.1)式两端求导数，然后取对数导数，整理得

$$1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}=a\sum_{i=1}^{n}\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}+b\sum_{j=1}^{m}\left[1+\frac{zg_j''(z)}{g_j'(z)}+(\gamma_j-1)\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}\right]+(1-na-mb\bar{\gamma}).$$
(3.2)

对(3.2)式两端取实部，然后关于 φ 从 φ_1 到 φ_2 积分，则有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi&=a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\sum_{i=1}^{n}\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\}d\varphi\\&+b\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\sum_{j=1}^{m}[1+\frac{zg_j''(z)}{g_j'(z)}+(\gamma_j-1)\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}]\}d\varphi\\&+(1-na-mb\bar{\gamma})(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}\quad(3.3)$$

(3.3)式中 $z=re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant2\pi$, $0\leqslant r<1$, φ 为实数. 由于 $g_j(z)\in SB_{\gamma_j}(\beta_j,\sigma_j)$，从引理 3 可得

$$\begin{aligned}-m\bar{\beta}\pi+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\sigma_j(\varphi_2-\varphi_1)&<b\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\sum_{j=1}^{m}[1+\frac{zg_j''(z)}{g_j'(z)}+(\gamma_j-1)\frac{zg_j'(z)}{g_j(z)}]\}d\varphi\\&<m\bar{\beta}\pi+2\pi\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\sigma_j(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}\quad(3.4)$$

又 $f_i(z)\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$，用引理 2 可得

$$\begin{aligned}-n\bar{\alpha}\pi+n\bar{\rho}(\varphi_2-\varphi_1)&<\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{\sum_{i=1}^{n}\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\}d\varphi\\&<n\bar{\alpha}\pi+2n\pi(1-\bar{\rho})+n\bar{\rho}(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}\quad(3.5)$$

以下分三种情况讨论：

(1) 当 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 时，利用(3.4)式和(3.5)式的左侧不等式，由(3.3)式可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi&>a[-n\bar{\alpha}\pi+n\bar{\rho}(\varphi_2-\varphi_1)]\\&+b[-m\bar{\beta}\pi+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\sigma_j(\varphi_2-\varphi_1)]+(1-na-mb\bar{\gamma})(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi&>-(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})\pi\\&+[1-na(1-\bar{\rho})-b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)](\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}\quad(3.6)$$

令(3.6)式右端为 $L(\varphi_2-\varphi_1)$，L 显然为 $\varphi_2-\varphi_1$ 的线性函数，其最小值必在区间$[0,2\pi]$的端点处取得. 由条件 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho}+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)\leqslant\frac{3}{2}$ 可得 $L(2\pi)\geqslant-\pi$，而由条件 $(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})\leqslant1$ 可得 $L(0)=-\pi$. 这样，我们有 $\min\{L(0),L(2\pi)\}\geqslant-\pi$，即对满足 $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant2\pi$ 的任意实数 φ_1 和 φ_2，总有 $L(\varphi_2-\varphi_1)\geqslant-\pi$，这意味着 $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi>-\pi$，从而 $G(z)\in C$.

(2) 当 $a\leqslant0,b\leqslant0$ 时，利用(3.5)式和(3.4)式的右侧不等式，由(3.3)式可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi&>a[n\bar{\alpha}\pi+2n\pi(1-\bar{\rho})+n\bar{\rho}(\varphi_2-\varphi_1)]\\&+b[m\bar{\beta}\pi+2\pi\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\sigma_j(\varphi_2-\varphi_1)]\end{aligned}$$

$$+(1-na-mb\bar{\gamma})(\varphi_2-\varphi_1)=L(\varphi_2-\varphi_1).$$

即

$$L(\varphi_2-\varphi_1)=(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})\pi+[an(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)]2\pi$$
$$+[1-an(1-\bar{\rho})-b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)](\varphi_2-\varphi_1).$$

此时 L 是单调增加的线性函数，由条件

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)$$

可得 $L(0)\geqslant-\pi$，因而 $L(\varphi_2-\varphi_1)\geqslant L(0)\geqslant-\pi$，这也就证明了 $G(z)\in C$.

(3) 当 $a\geqslant0,b\leqslant0$ 时，利用(3.4)式的左侧和(3.5)式的右侧不等式，从(3.3)式可得

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{Re}\{1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\}d\varphi>a[-n\bar{\alpha}\pi+n\bar{\rho}(\varphi_2-\varphi_1)]$$
$$+b[m\bar{\beta}\pi+2\pi\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\sigma_j(\varphi_2-\varphi_1)]$$
$$+(1-na-mb\bar{\gamma})(\varphi_2-\varphi_1)=L(\varphi_2-\varphi_1).$$

此时，只要 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})\leqslant\frac{3}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(-an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)$ 同时成立，便有 $L(0)\geqslant-\pi$，$L(2\pi)\geqslant-\pi$，其余部分与(1)类似. 至于 $a\leqslant0,b\geqslant0$ 的情况，证明过程与 $a\geqslant0,b\leqslant0$ 的情况完全类似，省略.

综上三部分讨论，我们证明了定理的前半部分，后半部分的证明仍需分三种情况讨论，我们不妨以情况(1)为例，即考虑 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 的情况. 此时，取

$$f_i(z)=\frac{z}{(1-z)^{2(1-\rho_i)+\alpha_i}},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$g_j(z)^{\gamma_j}=\gamma_j\int_0^z\frac{t^{\gamma_j-1}dt}{(1-t)^{2\gamma_j(1-\sigma_j)+\beta_j}},\quad j=1,2,\cdots,m.$$

其中幂函数均取主值. 易证这些函数满足条件 $f_i(z)\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$，$g_j(z)\in SB_{\gamma_j}(\beta_j,\sigma_j)$，并且有

$$G_1(z)=\int_0^z\frac{dt}{(1-t)^{na[2(1-\bar{\rho})+\bar{\alpha}]+b[2\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+m\bar{\beta}]}}.$$

由 Royster[5] 的结果知，$G_1(z)\in S$ 的充分必要条件是

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{na}{2}[2(1-\bar{\rho})+\bar{\alpha}]+\frac{b}{2}[2\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+m\bar{\beta}]\leqslant\frac{3}{2}.$$

另一方面

$$na[2(1-\bar{\rho})+\bar{\alpha}]+b[2\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)+m\bar{\beta}]$$
$$=an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta}+2[(na(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)]$$
$$=2[\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+na(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)].$$

这样，如果 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+b\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(1-\sigma_j)>\frac{3}{2}$，我们便得到相应的 $G_1(z)$，使得

$G_1(z)\bar{\in}S$，当然，$G_1(z)\bar{\in}C$. 这表明右端点$\frac{3}{2}$不能再大. 类似地，从其余两种情况可以看出，左端点$-\frac{1}{2}$不能再小. 至此，完成了定理的证明.

值得一提的是，文献[3]中的定理 3.2 有误，在证明该定理的过程中，在讨论 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 的情况，该文作者指出，只要 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+bm(1-\bar{\sigma})\leqslant\frac{3}{2}$，便有

$$-(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})\pi+[1-an(1-\bar{\rho})-bm(1-\bar{\sigma})](\varphi_2-\varphi_1)\geqslant-\pi. \tag{3.7}$$

其实不然，记(3.7)式左端为 $L(\varphi_2-\varphi_1)$. 事实上，只要取 $a=b=m=n=1$, $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=\bar{\rho}=\bar{\sigma}=\frac{2}{3}$. 此时 $\frac{1}{2}(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})+an(1-\bar{\rho})+bm(1-\bar{\sigma})=\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$，但是 $L(0)=-(an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta})\pi=-\frac{4}{3}\pi<-\pi$. 所以在该定理的 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 的情况中，应附加条件 $an\bar{\alpha}+bm\bar{\beta}\leqslant 1$.　　这样，本文完善和推广了[3]中的定理 3.2. 事实上，在本文的主要定理中令 $\gamma_j=1, j=1,2,\cdots,m$. 便得到[3]的定理 3.2.

参 考 文 献

[1] Kaplan, Michigan Math. J. 1(1952), 169—185.

[2] Royster, Michigan Math. J. 3(1955—56), 59—62.

[3] Shukla and Vindo Kumar, Indian J. Pure Appl. Math. 16(1985), No. 3, 279—290.

[4] Silverman, H., Ann. Univ. Marie Cruie Sklodowska Lublin, 29(1975), 105—115.

[5] Royster, Michigan Math. J. 12(1965), 385—387.

Close-to-Convexity of Certian Integral Operators

Li Chunming

(Harbin College of Surveying, Harbin)

Abstract

Let $CS^*(\alpha,\rho)$ and $SB_\gamma(\beta,\sigma)$ be the subclasses of close-to-starlike functions and Bazilevic functions class respectively. It is proved that the integral operators

$$\int_0^z\left\{\prod_{i=1}^{n}[\frac{f_i(t)}{t}]^a\prod_{j=1}^{m}[(\frac{g_j(t)}{t})^{\gamma_j-1}g_j'(t)]^b\right\}dt$$

is close-to-convex function under the same conditions, where $f_i\in CS^*(\alpha_i,\rho_i)$ and $g_j\in SB_{\gamma_j}(\beta_j,\sigma_j)$. In addition, we correct a mistake in [3].