第13卷第3期 数学研究与评论 Vol. 13 No. 3
1993年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1993

关于有限生模嵌入自由模*

蒋 方 明
(南京理工大学应用数学系,210014)

摘 要

本文利用模的 II—有限生成性质刻画了具有性质任意有限生成左模是自由模的子模的环. 另外,还给出了左 IF—环的一个刻画.

一 引 言

本文中的环皆指有单位元的结合环,所有的模都是酉模.

设 A 为左 R—模,其对偶模 $A^*=\mathrm{Hom}_R(A,R)$ 是右 R—模,$A^{**}=\mathrm{Hom}_R(A^*,R)$,则有自然同态 $\sigma_A:A\to A^{**}$. 这里 $\sigma_A(a)(f)=f(a)$ 对任意的 $a\in A$ 及 $f\in A^*$. 如果 σ_A 是单的,则称 A 是无挠的;如果 σ_A 是同构,则称 A 是自反的.

在[1]中,R. R. Colby 称一个右 R—模 M 是 II—有限生成的,如果存在 M 的有限生成子模 K,使得 $(M/K)^*=0$. 一个右 R—模 P 称为 II—有限表示,如果存在 II—有限生成右 R—模 K,使得 $0\to K\to R^{(n)}\to P\to 0$ 正合,$n\in N$. 一个环称为右 II—凝聚的,如果 R 的任意有限生成右理想是 II—有限表示,他利用 R 的右 II—凝聚性,成功地刻画了左 IF—环([1]. Theorem1). 本文利用模的 II—有限生成性质,刻画了具有性质任意有限生成左模是自由模的子模的环(定理 3.2). 另外,还给出了左 IF—环的一个刻画(定理 3.3). 所得结果推广了 S. Jain 及 E. Matlis 的相应结果.

二 有限表示模的对偶

命题 2.1 设 K 是自由右 R—模 F_1 的有限生成子模,则存在有限表示左 R—模 P. 使得 $0\to P^*\to F_2\to K\to 0$ 正合,这里 F_2 是有限生成自由模.

证明 设 $F_1=x_1R+x_2R+\cdots+x_mR$. $x_1,x_2\cdots,x_m$ 是 F_1 的自由生成元,$K=a_1R+a_2R+\cdots+a_nR$. $a_j=x_1a_{j1}+x_2a_{j2}+\cdots+x_ma_{jm},j=1,2,\cdots,n$. 作同态 $\varphi:F_2=y_1R+y_2R+\cdots+y_nR\to K$. 这里 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 F_2 的自由生成元. $\varphi(y_1r_1+y_2r_2+\cdots+y_nr_n)=a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_nr_n$. 则有正合列 $0\to\mathrm{Ker}\varphi\to F_2\to K\to 0$. 这里 $\mathrm{Ker}\varphi=\{y_1r_1+y_2r_2+\cdots+y_nr_n\in F_2|a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_nr_n=0\}=\{y_1r_1+y_2r_2+\cdots+y_nr_n\in F_2|a_{1k}r_1+a_{2k}r_2+\cdots+a_{nk}r_n=0,k=1,2,\cdots,m\}$. 令 $F_3=Rz_1+Rz_2+\cdots+Rz_n$. 这里 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是自由

* 1991年4月21日收到.

左 R—模的自由生成元. $b_k=a_{1k}z_1+a_{2k}z_2+\cdots+a_{nk}z_n\in F_3, k=1,2,\cdots,m$. 则 $L=Rb_1+Rb_2+\cdots+Rb_m$ 是 F_3 的有限生成子模. 记 $P=F_3/L$. 则 P 是有限表示左 R—模，下面我们证明 $\mathrm{Ker}\varphi\cong P^*$. 考虑如下映射 $\eta:\mathrm{Ker}\varphi\to P^*$，这里 $\eta(y_1r_1+y_2r_2+\cdots+y_nr_n)=f:P\to R$. $f\,\overline{(t_1z_1+t_2z_2+\cdots+t_nz_n)}=t_1r_1+t_2r_2+\cdots+t_nr_n$. 则直接验证易知 f 有意义且是同态，从而 η 有意义且是同态，再作映射 $\xi:P^*\to\mathrm{Ker}\varphi$. 这里 $\xi_{(f)}=y_1f(\bar{z}_1)+y_2f(\bar{z}_2)+\cdots+y_nf(\bar{z}_n)$ 对任意的 $f\in P^*$，则容易验证 ξ 有意义且是同态，再由 $\xi\circ\eta=1_{\mathrm{Ker}\varphi}, \eta\circ\xi=1_{P^*}$. 知 η 是同构. 从而有正合列 $0\to P^*\to F_2\to K\to 0$. 证毕.

命题 2.2 设 R 是环，则下面两条等价：

1〉 自由右 R—模的任意有限生成子模是 II—有限表示.

2〉 任意有限表示左 R—模的对偶模 II—有限生成.

证明 1〉⇒2〉 设 A 是任意有限表示左 R—模，则有正合列 $F_2\xrightarrow{i}F_1\xrightarrow{\pi}A\to 0$. 这里 F_1,F_2 是有限生成自由模. 从而有正合列 $0\to A^*\to F_1^*\to \mathrm{Imi}^*\to 0$，$\mathrm{Imi}^*$ 是自由右 R—模 F_2^* 的有限生成子模，从而 Imi^* 是 II—有限表示，由 Schanuel 引理知 A^* II—有限生成.

2〉⇒1〉 由命题 2.1 知存在有限表示左 R—模 A，使得 $0\to A^*\to F\to K\to 0$ 正合. 这里 F 是有限生成自由模. 由 A^* II—有限生成知 K 是 II—有限表示. 证毕.

利用命题 2.1，很容易给出 R. R. Collby 的一个结果的简单证明([1]. Proposition 1).

推论 2.3 设 R 是环，则下面几条等价：

1〉 R 是右凝聚的.

2〉 任意有限表示左 R—模的对偶模 P^* 有限生成.

3〉 任意有限表示左 R—模 P 的对偶模 P^* 有限表示.

证明 1〉⇒2〉 由自由模的任意有限生成右 R—模是有限表示及命题 2.2 的证明易知对任意有限表示左 R—模 P，有 P^* 有限生成.

2〉⇒3〉 由 P^* 是自由模的有限生成子模及命题 2.1 知存在有限表示左 R—模 B，使得 $0\to B^*\to F\to P^*\to 0$ 正合，F 是有限生成自由模. 由 B^* 有限生成，知 P^* 有限表示.

3〉⇒1〉 与命题 2.2 的 2〉⇒1〉类似. 证毕.

一个环 R 称为右 FP—内射环，如果任意从有限生成自由模 F 的有限生成子模到 R_R 的同态，可以扩充成 F 到 R 的同态. 显然，一个环 R 是右 FP—内射环当且仅当对任意有限表示右 R—模 P，有 $\mathrm{Ext}_R^1(P,R)=0$. 事实上，我们还有下面的

命题 2.4 一个环 R 是右 FP—内射环当且仅当对任意 II—有限表示右 R—模 A，有 $\mathrm{Ext}_R^1(A,R)=0$.

证明 设 A_R 是 II—有限表示右 R—模，则有正合列 $0\to K_R\to R^{(n)}\to A_R\to 0$，这里 K 是 II—有限生成，亦即存在 K 的有限生成子模 L，使 $(K/L)^*=0$. 考虑下面具有正合列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & A^* & \to & R^{(n)*} & \to & K_R^* & \to & \mathrm{Ext}_R^1(A,R) & \to 0\\
 & & & \| & & \downarrow i^* & & & \\
0\to & B^* & \to & R^{(n)*} & \to & L^* & \to & \mathrm{Ext}_R^1(B,R) & \to 0
\end{array}$$

这里 $B=R^{(n)}/L$ 是有限表示右 R—模，再由 $0\to(K/L)^*\to K^*\xrightarrow{i^*}L^*$ 的正合性知 i^* 是单射，若 R 是右 FP—内射环，则有 $\mathrm{Ext}_R^1(B,R)=0$. 再由图的交换性知 i^* 是满射，从而 i^* 是同构，由此即知 $\mathrm{Ext}_R^1(A,R)=0$. 充分性显然. 证毕.

上面的几个命题在下面的讨论中将要用到.

三 关于有限生成模嵌入自由模

潘世忠在[2]中称 R 适合性质 F,如果任意有限生成左 R－模都同构于一个自由模的子模,他利用环的 F 性质给出了 QF－环的一个刻画.另外,在 R 是左 Noether 的条件下,给出了 R 具有性质 F 的一个充要条件.本文证明了当 R 是右 FP－内射环时,一个有限生成左 R－模是自由模的子模当且仅当它是无挠的,且其对偶模 II－有限生成.进而给出了 R 适合性质 F 的一个刻画.

定理 3.1 设 R 是右 FP－内射环,则下面两条等价:

1〉 有限生成左 R－模 M 是自由模的子模.

2〉 M 是无挠的,且 M^* II－有限生成.

证明 1〉⇒2〉 设 M 是有限生成自由模 F_1 的子模,则有有限生成自由模 F_2,使得 $F_2\xrightarrow{\pi}M\to 0$ 正合,从而有 $0\to M^*\xrightarrow{\pi^*}F_2^*$ 正合.设 $f_i:F_1\to R$,这里 $f_i(r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)=r_i$, $i=1,2,\cdots,n$; $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 F_1 的自由生成元.再令 $g_i=f_i|_M$,则 $g_i\in M^*$,且有 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}g_i=0$.作 $K=g_1R+g_2R+\cdots+g_nR$,则由 $K\xrightarrow{i}M^*$,有 $0\to K\xrightarrow{\pi^*\circ i}F_2^*\to P\to 0$ 正合,这里 P 是有限表示右 R－模.由 R 是右 FP－内射环,又有 $0\to P^*\to F_2^{**}\xrightarrow{(\pi^*\circ i)^*}K^*\to 0$ 正合.再由 $(\pi^*\circ i)^*=i^*\circ\pi^{**}$ 知 i^* 是满同态,考虑如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} F_2^{**} & \xrightarrow{\pi^{**}} & M^{**} & \xrightarrow{i^*} & K^* \\ \cong\| & & \uparrow\sigma_M & & \\ F_2 & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

由图的交换性知 $i^*\circ\sigma_M:M\to K^*$ 是满射,下证 $i^*\circ\sigma_M$ 是单同态,若 $a\in M$ 使得 $i^*\circ\sigma_{M(a)}=0$.即对任意的 $g\in K$,恒有 $g_{(a)}=0$.故 $a\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}g_i=0$,从而 $M\cong K^*$.又若 L 是 M^* 中包含 K 的任一有限生成右 R－模,显然亦有 $M\cong L^*$.再由图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i^*\circ\sigma_M} & K^* \\ \| & & \uparrow k^* \\ M & \xrightarrow{j^*\circ\sigma_M} & L^* \end{array}\qquad (L\xrightarrow{j}M^*,\ K\xrightarrow{k}L)$$

的交换性有 $K^*\overset{K^*}{\cong}L^*$.再由 $0\to K\to L\to L/K\to 0$ 正合有 $0\to(L/K)^*\to L^*\xrightarrow{K^*}K^*$ 正合,从而 $(L/K)^*=0$.下面用反证法证明 $(M^*/K)^*=0$.若 $(M^*/K)^*\neq 0$,则有 $f\in(M^*/K)^*$ 及 $\eta\in M^*$,使得 $f(\bar\eta)\neq 0$.令 $H=K+\eta R$.则 $f|_{H/K}\in(H/K)^*$.但 H 有限生成且包含 K,故应用 $(H/K)^*=0$,与 $f|_{H/K}\neq 0$ 矛盾.故 $(M^*/K)^*=0$.即 M^*II－有限生成.M 是无挠的由 M 是自由模的子模即得.

2〉⇒1〉 由 M 是无挠的，有 $\bigcap_{f\in M^*}\mathrm{Ker}f=0$. 再由 M^* 是 Π—有限生成，有 M^* 的有限生成子模 K 使得 $(M^*/K)^*=0$. 设 $K=\eta_1\cdot R+\eta_2\cdot R+\cdots+\eta_t\cdot R$, $\eta_i\in M^*$, $i=1,2,\cdots,t$. 又设 $F=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_t$，这里 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 是自由模 F 的自由生成元. 作同态 $\sigma:M\to F$，这里 $\sigma_{(a)}=\eta_{1(a)}x_1+\eta_{2(a)}x_2+\cdots+\eta_{t(a)}x_t$，对任意的 $a\in M$，则 σ 是单同态. 事实上，若 $\sigma_{(a)}=0$，则有 $\eta_{i(a)}=0$, $i=1,2,\cdots,t$. 从而对任意的 $\eta\in K$，有 $\eta_{(a)}=0$. 再作 $\xi:M^*/K\to R$，这里 $\xi(\bar{\tau})=\tau_{(a)}$ 对任意的 $\tau\in M^*$. 直接验证易知 ξ 有意义且是同态，但 $(M^*/K)^*=0$. 故 $\xi=0$. 即 $\tau_{(a)}=0$ 对任意的 $\tau\in M^*$. 再由 $a\in\bigcap_{f\in M^*}\mathrm{Ker}f=0$ 知 $a=0$. 即 σ 是单同态，从而证明了 M 是自由模的子模. 证毕.

有了定理 3.1，可以很容易地得到 R 具有性质 F 的一个刻画.

定理 3.2 设 R 是一个环，则下面几条等价：

1〉 R 具有性质 F.

2〉 任意有限生成左 R—模是自反的，且其对偶模 Π—有限生成.

3〉 任意有限生成左 R—模是无挠的，且其对偶模 Π—有限生成.

证明 1〉⇒2〉 由任意有限生成左 R—模是自由模的子模知 R 是左 IF—环([1]Theorem 1)从而 R 是右 Π—凝聚的右 FP—内射环. 再由定理 3.1 知，任意有限生成左 R—模 M 的对偶模 Π—有限生成. 下面证明 M 是自反的. 设 $F\xrightarrow{\pi}M\to 0$ 正合，这里 F 是有限生成自由模，则 $0\to M^*\to F^*\to N\to 0$ 正合. 由 $M^*\Pi$—有限生成知 N 是 Π—有限表示. 再由命题 2.4 有正合列及如下的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & N^* & \to & F_2^{**} & \xrightarrow{\pi^{**}} & M^{**} & \to & 0 \\
 & & & & \| & & \uparrow \sigma_M & & \\
 & & & & F & \xrightarrow{\pi} & M & \to & 0
\end{array}$$

由图的交换性知 σ_M 是满的，又 M 是无挠的，故 σ_M 是同构. 即 M 是自反的.

2〉⇒3〉 显然.

3〉⇒1〉 在定理 3.1 的 2〉⇒1〉的证明中并未用到 R 是右 FP—内射环这一条件，故由此即知 R 具有性质 F. 证毕.

S. Jain 在[3]中证明了若 R 是右凝聚的右 FP—内射环，则任意有限表示左 R—模是自反的([3]. Corollarry 2.4). *E.* Math 在交换的情形下证明了 R 是半正则环(即 IF—环)的充要条件是 R 是凝聚环且任意有限表示 R—模是自反的([4]. Proposition 4.4). 有了定理 3.1，我们可以将他们的结果作如下推广：

定理 3.3 设 R 是环，则下面几条等价：

1〉 R 是左 IF—环.

2〉 任意有限表示左 R—模是自由模的子模.

3〉 任意有限表示左 R—模是自反的，且其对偶模 Π—有限生成.

4〉 任意有限表示左 R—模是无挠的，且任意自由右 R—模的有限生成子模是 Π—有限表示.

证明 1〉⇔2〉 ([1]. Theorem 1).

2〉⇒3〉 由任意有限表示左 R－模是无挠的，知 R 是右 FP－内射环．再由定理 3.1 知任意有限表示左 R－模的对偶模 H－有限生成．自反性的证明与定理 3.2 的 1〉⇒2〉的证明完全一样．

3〉⇒4〉 由命题 2.2 即知．

4〉⇒2〉 由命题 2.2 知，任意有限表示左 R－模的对偶模 H－有限生成．再由定理 3.1 的 2〉⇒1〉的证明即知．证毕．

参 考 文 献

［1］ R. R. Colby, *Rings which have flat injective modules*; J. Algebra, 5(1975), 239—253.

［2］ 潘世忠 关于有限生成模嵌入自由模，数学学报，Vol. 30, No. 6(1987).

［3］ S. Jain, *Flat and FP—injective*, Proc. Amer. Math. Soc. , Vol. 41. No. 2(1973).

［4］ E. Matlis, *Commutative semi—coherent and semi—regular rings*, J. Algebra, Vol. 95(1985).

［5］ J. J. Ratman, *An Introduction to Homological Algebra*, Acadmic Press, 1979.

［6］ J. P. Jans, *Rings and Homology*, Holt Rinart and Wiston, New York, 1964.

On Finite Generated Modules Embedded into Free Modules

Jiang Fangming

(Nanjing Univ. of Scie. and Tech., Nanjing)

Abstract

This paper characterizes rings which have the property that every finite generated left modules can be embedded into a free module by means of the H−finite generated property of modules and presents a characterization of left IF−rings.